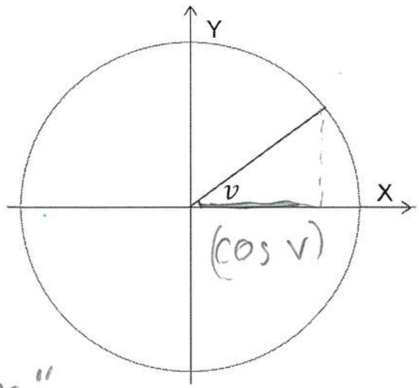
FACIT

3.2 Trigonometriska ettan

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bilden visar en enhetscirkel med en vinkel v markerad.

   För vinkel v gäller att $\sin(v) = \dfrac{3}{5}$



   Bestäm ett exakt värde på $\cos(v)$ (2/0/0)

Trig. ettan ⇒ "Vet ena, kan bestämma den andra"

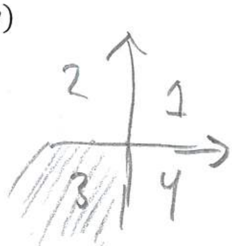
$$\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$ Enligt figuren är cos v pos. ⇒ $+\frac{4}{5}$

2. För en vinkel, v, gäller att $\cos(v) = -\dfrac{2}{5}$ och v ligger i tredje kvadranten.

   Bestäm ett exakt värde på $\sin(v)$ (2/0/0)

Tredje kvadranten ⇒



⇒ sin negativ

Trig. ettan ⇒ $\sin v = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{4}{25}} = -\sqrt{\frac{21}{25}}$

$$= -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

3. Visa att $\sin^2(25°) + 24 + \cos^2(25°) = 25\sin^2(50°) + 25\cos^2(50°)$ (2/0/0)

$$VL = \sin^2(25°) + 24 + \cos^2(25°) = \left[\begin{array}{c}\text{Trig. ettan}\\ \sin^2+\cos^2=1\end{array}\right] = 1+24 = 25$$

$$HL = 25\sin^2(50°) + 25\cos^2(50) = \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut}\\ 25\end{array}\right] = 25(\sin^2(50°)+\cos^2(50°))$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Trig. ettan}\\ \sin^2+\cos^2=1\end{array}\right] = 25\cdot 1 = 25 = VL$$

VSV.

4. För en vinkel, v, gäller att $\sin(v) = \frac{1}{3}$

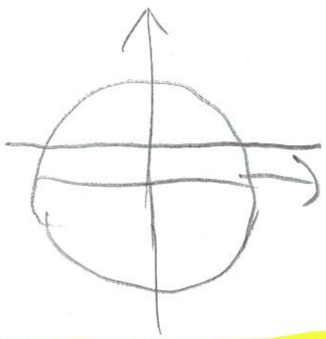
a) Bestäm möjliga värden på $\cos(v)$ (2/0/0)

Trig. ettan $\Rightarrow \cos(v) = \pm\sqrt{1-\sin^2(v)} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} =$

$= \pm\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

b) Förklara med hjälp av enhetscirkeln varför det finns två möjliga svar på a)-uppgiften (1/0/0)

$\sin(v) = \frac{1}{3}$ säger att v finns i första eller andra kvadranten



$\Rightarrow$ cos v är antingen pos. eller negativ

5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (2/0/0)

Visa att $\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$ för alla x där uttrycken är definierade.

$VL = \cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Gångra in}\\ \cos^2 x\end{array}\right] =$

$= \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x = \left[\begin{array}{c}\text{Förkorta}\\ \cos^2 x\end{array}\right] =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = \left[\text{Trig ettan}\right] = 1 = HL$

vsv.

6. Visa att $\sin(v) + \dfrac{\cos(v)}{\tan(v)} = \dfrac{1}{\sin(v)}$

för alla värden på v för vilket uttrycken är definerade (1/2/0)

$$VL = \sin(v) + \frac{\cos(v)}{\tan(v)} = \left[\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}\right] = \sin(v) + \frac{\cos(v)}{\frac{\sin(v)}{\cos(v)}} =$$

$$= \sin(v) + \frac{\cos^2(v)}{\sin(v)} = \left[\text{Skriv båda termerna med nämnaren } \sin(v) : \sin(v) = \frac{\sin^2(v)}{\sin(v)}\right]$$

$$= \frac{\sin^2(v)}{\sin(v)} + \frac{\cos^2(v)}{\sin(v)} = \left[\text{Skriv på samma bråkstreck}\right] = \frac{\sin^2(v) + \cos^2(v)}{\sin(v)}$$

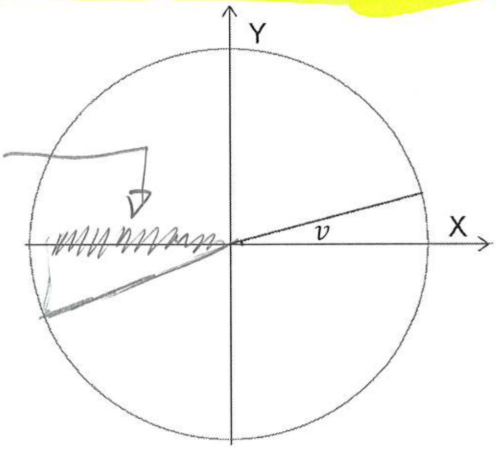
$$= \left[\text{Trig. ettan i täljaren}\right] = \frac{1}{\sin(v)} = HL \text{ VSV.}$$

7. Bilden visar en enhetscirkel med en vinkel v markerad.

För vinkel v gäller att $\sin(v) = \dfrac{1}{4}$

Bestäm ett exakt värde på

$\sin(v) - \cos(v + 180°)$ (0/2/0)



Enligt figuren gäller att $\cos(v)$ är positiv.

$\cos(v+180°)$ är lika stor fast negativ

Trig. ettan $\Rightarrow \cos(v) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(v+180°) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin(v) - \cos(v+180°) = \frac{1}{4} - -\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{1+\sqrt{15}}{4}$

8. Bestäm det värde på konstanten a som gör att likheten nedan gäller

$(2\sin(x) + 3\cos(x)) \cdot (2\sin(x) - 3\cos(x)) + a \cdot \cos^2(x) = 4$ (0/2/0)

Gångra ihop ( )( ) $\Rightarrow$ Konjugatregeln $\Rightarrow$

$$4\sin^2(x) - 9\cos^2(x) + a\cos^2(x) = 4$$

$$4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot (\sin^2(x) + \cos^2(x))$$
$$= 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x)$$

$$4 \cdot \sin^2(x) + (a-9) \cdot \cos^2(x) = 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x)$$

$$\Rightarrow a - 9 = 4 \Rightarrow a = 13$$

9. Visa att $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)} - \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = 2\tan(x)$

för alla värden på x för vilket uttrycken är definerade (0/3/0)

$$VL = \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = \left[\begin{array}{c}\text{Gemensam nämnare:} \\ (1-\sin(x))(1+\sin(x))\end{array}\right] =$$

Förläng med $(1+\sin(x))$

Förläng med $(1-\sin(x))$

$$= \frac{\cos(x)(1+\sin(x)) - \cos(x)(1-\sin(x))}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))} = \left[\begin{array}{c}\text{Konjugatregeln i nämnaren:} \\ (1-\sin(x))(1+\sin(x)) \\ = 1-\sin^2(x)\end{array}\right]$$

$$= \frac{\cos(x) + \sin(x)\cos(x) - \cos(x) + \sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \left[\begin{array}{c}\text{Trig. ettan:} \\ 1-\sin^2(x) = \cos^2(x)\end{array}\right]$$

$$= \frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)} = \left[\begin{array}{c}\text{Förkorta} \\ \cos(x)\end{array}\right] = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)} = 2\tan(x) = HL$$

VSV

10. Det finns en trigonometrisk formel, den s.k. "dubbla vinkeln för sinus", som lyder:
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

a) Bestäm med hjälp av den möjliga värden på $\cos(2v)$ om $\sin(v) = \frac{2}{3}$ (0/2/1)

Strategi:

	sin	cos
2v		
v	2/3	

Trig. ettan

⇒

	sin	cos
2v	Δ	
v		

Dubbla vinkeln

⇒

	sin	cos
2v		v
v		

Trig. ettan

$\cos(v) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} =$
$= \pm\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{4}{9}} =$
$= \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin(2v) = 2\cdot\sin(v)\cdot\cos(v) =$
$= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\pm\frac{\sqrt{5}}{3} =$
$= \pm\frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\cos(2v) =$
$\pm\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{5}}{9}\right)^2} =$
$= \pm\sqrt{\frac{81}{81}-\frac{16\cdot 5}{81}} =$
$= \pm\left[16\cdot 5 = 80\right] = \pm\frac{1}{9}$

b) Använd formeln för dubbla vinkeln för sinus för att bestämma
ett positivt exakt värde på $\tan(4x)$ om ~~sin(2x)~~ $= \frac{1}{3}$
$\cos(2x)$

OBS! 4x är dubbla 2x (0/1/2)

Strategi:

	sin	cos
4x		
2x		1/3

Trig. ettan

⇒

	sin	cos
4x	Δ	
2x		

Dubbla vinkeln

⇒

	sin	cos
4x		v
2x		

Trig. ettan

⇒ $\tan(4x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}$

$\sin(2x) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$
$= \pm\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{1}{9}} =$
$= \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

$\sin(4x) = 2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)$
$= 2\cdot\pm\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{3} =$
$= \pm\frac{2\sqrt{8}}{9}$

$\cos(4x) =$
$\pm\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{8}}{9}\right)^2} =$
$= \pm\sqrt{\frac{81}{81}-\frac{4\cdot 8}{81}} =$
$= \pm\frac{7}{9}$

$\tan(4x) =$
$\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} =$
$\frac{\frac{2\sqrt{8}}{9}}{7/9} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$

11. Visa att $\frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)}$

för alla värden på x för vilket uttrycken är definerade (0/0/2)

$$VL = \frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)} = \left[\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right] =$$

$$= \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{1-\cos(x)} = \left[\begin{array}{l}\text{Förläng med} \\ (1+\cos(x))\end{array}\right] = \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Konjugatregeln i nämnaren:} \\ (1-\cos(x))(1+\cos(x)) = 1-\cos^2(x)\end{array}\right] = \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}}{1-\cos^2(x)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Trig. ettan:} \\ 1-\cos^2(x) = \sin^2(x)\end{array}\right] = \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}}{\sin^2(x)} =$$

$$= \left[\text{Förkorta } \sin^2(x)\right] = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos(x)} = HL$$

VSV.