FACIT

3.3 Additionsformlerna

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Visa att
$\sin(x + 90°) = \cos(x)$
med hjälp av additionsformeln för sinus (2/0/0)

$VL = \sin(x+90°) = \sin x \cdot \cos 90° + \sin 90° \cdot \cos x =$
$= \left[\begin{matrix}\cos 90° = 0 \\ \sin 90° = 1\end{matrix}\right] = \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x =$
$= \cos x = HL$ VSV

2. Tryggve Trigonometri föreslår en egen additionsformel för cosinus:

$\cos(a + b) = \cos(a) + \cos(b)$

Ge exempel på vinklar a och b för att förklara för Tryggve att denna regel omöjligt kan fungera. (2/0/0)

Varken cos eller sin kan bli större än 1

Om ex: $a = 0°$ och $b = 0°$ blir, enligt Tryggve:

$\cos(0° + 0°) = \cos(0°) + \cos(0°) = [\cos 0° = 1] = 2$ vilket är omöjligt

3. För de två vinklarna u och v, vilka båda är i första kvadranten gäller att

$\cos(u) = \frac{2}{3} \qquad \sin(v) = \frac{1}{4}$

a) Bestäm exakta värden på $\sin(u)$ och $\cos(v)$ (3/0/0)

Trig. ettan: $\sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos(v) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

b) Bestäm värdet av $\sin(u - v)$. *Svara exakt!* (0/1/0)

$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos(v) - \sin(v) \cdot \cos(u) =$
$= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} =$
$= \frac{\sqrt{75}}{12} - \frac{2}{12} = \frac{\sqrt{75} - 2}{12}$

4. Visa att

$$2\cos\left(v - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(v) + \sqrt{3}\sin(v) \qquad (1/1/0)$$

$$VL = 2\cos\left(v - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos v \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin v\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right] = 2\left(\cos v \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin v\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\cos v + \sqrt{3}\sin v}{2}\right) =$$

$$= \cos v + \sqrt{3}\sin v = HL \quad \text{VSV.}$$

5. För en vinkel, v, som ligger i första kvadranten gäller att $\cos(v) = \frac{3}{5}$
Bestäm ett exakt värde på $\sin(v + 30°)$ (1/2/0)

$$\cos v = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{Trig. ettan}: \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(v + 30°) = \sin v \cdot \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos v =$$

$$= \left[\begin{matrix}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30° = \frac{1}{2}\end{matrix}\right] = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$$

6. Bestäm ett exakt värde på $\cos(75°)$ (0/2/0)

$$75° = 45° + 30° \Rightarrow \cos 75° = \cos(45° + 30°) =$$

$$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \sin 45° =$$

$$= \left[\begin{matrix}\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30° = \frac{1}{2} \\ \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

7. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Visa att $\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$

$$VL = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot \sin x\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sin x\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Gångra in} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \cos x - \sin x = HL \text{ vsv}$$

8. Härled formeln för den s.k. *dubbla vinkeln för cosinus,*

$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v)$

med hjälp av additionsformeln för cosinus (0/2/0)

$$2v = v + v$$

$$VL = \cos(2v) = \cos(v+v) = \cos v \cdot \cos v - \sin v \cdot \sin v =$$

$$= \cos^2 v - \sin^2 v = \begin{bmatrix} \text{Trig. ettan:} \\ \cos^2 v = 1 - \sin^2 v \end{bmatrix} =$$

$$= 1 - \sin^2 v - \sin^2 v = 1 - 2\sin^2 v = HL$$

vsv.

9. Bestäm ett exakt värde på $\tan(-105°)$ (0/2/1)

$$-105° = 45° - 150° \qquad \tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

$$\tan(-105°) = \frac{\sin(-105°)}{\cos(-105°)} = \frac{\sin(45° - 150°)}{\cos(45° - 150°)} =$$

$$= \frac{\sin 45° \cdot \cos 150° - \sin 150° \cdot \cos 45°}{\cos 45° \cdot \cos 150° + \sin 150° \cdot \sin 45°} = \begin{bmatrix} \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 150° = \frac{1}{2} \\ \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}$$

10. v är en vinkel i andra kvadranten för vilken det gäller att

$$\sin\left(v - \frac{\pi}{6}\right) = k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{10}$$

Bestäm det exakta värdet av konstanten k (0/0/2)

$$\sin\left(v - \frac{\pi}{6}\right) = \sin v \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos v = \left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$= \sin v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos v$$ Jmf med det givna uttrycket.

$$k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \cos v = +\frac{1}{10} \Rightarrow \cos v = -\frac{1}{5}$$

$$k = \sin v = \text{Trig. ettan}: \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

11. Härled formeln för den *s.k. trippla vinkeln för sinus,* dvs (0/0/3)

$$\sin(3v) = 3\sin(v) - 4\sin^3(v)$$

$$VL = \sin(3v) = \sin(2v + v) = \sin(2v) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot \cos(2v) =$$

$$= [2v = v + v] = \sin(v + v) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot \cos(v + v) =$$

$$= (\sin(v) \cdot \cos(v) + \sin(v)\cos(v)) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot (\cos^2(v) - \sin^2(v))$$

$$= 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot \cos^2(v) - \sin^3(v) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2 \text{ st } \sin(v) \cdot \cos^2(v) + 1 \text{ st } \sin(v)\cos^2(v) = \\ = 3 \text{ st } \sin(v)\cos^2(v) \end{array}\right]$$

$$= 3\sin(v)\cos^2(v) - \sin^3(v) = \left[\begin{array}{l} \text{Trig. ettan:} \\ \cos^2(v) = 1 - \sin^2(v) \end{array}\right]$$

$$= 3\sin(v)(1 - \sin^2(v)) - \sin^3(v) =$$

$$= 3\sin(v) - 3\sin^3(v) - \sin^3(v) = 3\sin(v) - 4\sin^3(v)$$

$= HL$ vm