FACIT

3.4 Dubbla vinkeln

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. För en vinkel, v, gäller att
   $0° < v < 90°$ och $\sin(v) = \frac{1}{2}$

   Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att...

   a) ...först identifiera värdet på v med hjälp av vinkeltabellen. (1/0/0)

$$\sin(v) = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 30° \Rightarrow 2v = 60°$$

$$\sin(2v) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   b) ...använda formeln för dubbla vinkeln för sinus. (2/0/0)

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) = \left[\begin{array}{l} v = 30° \\ \cos(v) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Visa att $(\sin(x) + \cos(x))^2 = \sin(2x) + 1$ (2/0/0)

$$VL = (\sin x + \cos x)^2 = [\text{kvadreringsregel}] =$$

$$= \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \left[\begin{array}{l} \text{Trig. ettan} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array}\right]$$

$$= 1 + 2\sin x \cdot \cos x = \left[\begin{array}{l} \text{Dubbla vinkeln} \\ 2\sin x \cos x = 2\sin x \end{array}\right] = \sin(2x) + 1$$

$$= HL \quad \text{VSV}$$

3. Visa att $\frac{\tan(2x)}{2} = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(2x)}$ (2/0/0)

$$VL = \frac{\tan(2x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \left[\begin{array}{l} \text{Dubbla vinkeln} \\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(2x)} = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(2x)} = HL$$

VSV.

4. För en vinkel, v, i ~~fjärde~~ första kvadranten gäller att $\cos(v) = \dfrac{1}{4}$

a) Bestäm det exakta värdet av $\cos(2v)$ (2/0/0)

Använd den variant av cos(2v) som utgår från cos(v), dvs

$$\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1 = \left[\cos(v) = \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{2}{16} - \frac{16}{16} = -\frac{7}{8}$$

b) Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att använda trig. ettan och svaret i a) (1/0/0)

Trig. ettan $\Rightarrow$ $\sin(2v) = \sqrt{1 - \cos^2(2v)} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}}$

$$= \sqrt{\frac{64}{64} - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

c) Bestäm värdet av $\sin(2v)$ genom att använda formeln för dubbla vinkeln för sinus. (1/1/0)

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) = \left[\begin{array}{l} \cos(v) = \frac{1}{4} \\ \sin(v) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{array}\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

5. Visa att $\dfrac{\sin(4x)}{4} = \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x)$ (0/2/0)

OBS! 4x är dubbla 2x

$$VL = \frac{\sin(4x)}{4} = \frac{\sin(2 \cdot 2x)}{4} = \frac{2\sin(2x) \cdot \cos(2x)}{4} =$$

$$= \left[\sin(2x) = 2\sin x \cos x\right] = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x)}{4}$$

$$= \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(2x) = HL$$

vsv

6. För en vinkel, v, som befinner sig i första kvadranten gäller att $\cos(v) = \frac{3}{4}$
Komplettera tabellen nedan (1/2/0)

	sin	cos
$2v$	(2) $\frac{3\sqrt{7}}{8}$	(3) $\frac{1}{8}$
v	(1) $\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{3}{4}$

1. Trig. ettan:

$$\sin(v) = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

2. Dubbla vinkeln för sin

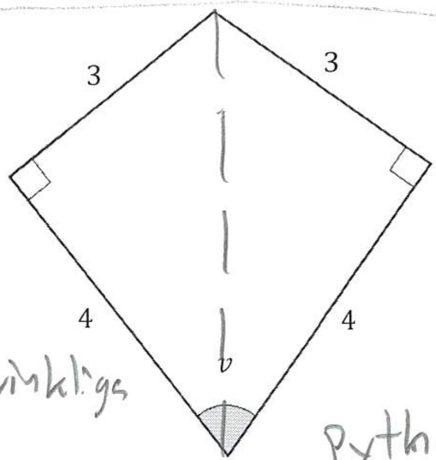
$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v) = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

(3) Dubbla vinkeln för cos (el. trig.ettan)

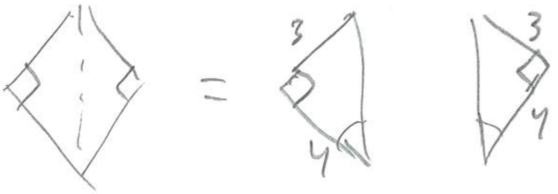
$$\cos(2v) = 2 \cdot \cos^2(v) - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{18}{16} - \frac{16}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

7. Figuren visar en fyrhörning med två räta vinklar och måtten utgivna.

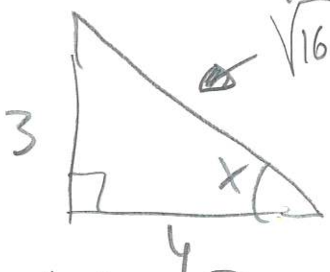
Bestäm med hjälp av figuren det exakta värdet av $\sin(v)$ (0/3/0)



Dra strecket rakt igenom figuren
Då fås 2 st likadana rätvinkliga trianglar:



Pyth. sats ger $\sqrt{16+9} = 5$



Vinkel v består av 2x
$v = 2x$

$$\sin(x) = \frac{3}{5}$$

$$\cos(x) = \frac{4}{5}$$

$$\sin(v) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{12}{25} = \frac{24}{25}$$

8. Visa att $\cos^4(3x) - \sin^4(3x) = \cos(6x)$ (0/0/1)

$$VL = \cos^4(3x) - \sin^4(3x) = \left[\begin{matrix}\text{Konjugatregeln} \\ (\text{OBS! } \sin^4 x = (\sin^2 x)^2)\end{matrix}\right] =$$

$$= (\cos^2(3x) - \sin^2(3x))(\cos^2(3x) + \cos^2(3x)) = \left[\text{Trig. ettan}\right]$$

$$= \cos^2(3x) - \sin^2(3x) = \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln för cos} \\ 6x = 2 \cdot 3x\end{matrix}\right] = \cos(6x)$$

$$= HL \quad \text{VSV.}$$

9. För en vinkel, v, gäller att $\sin(v) = \dfrac{1}{3}$

$\sin(4v)$ är ett positivt tal. Bestäm värdet av detta. (0/2/1)

	sin	cos
$4v$	$\dfrac{28\sqrt{8}}{81}$	
$2v$	$\dfrac{2\sqrt{8}}{9}$	$\dfrac{7}{9}$
v	$1/3$	$\dfrac{\sqrt{8}}{3}$

Trig. ettan

$$\sin(2v) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$$

$$\cos(2v) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\sin(4v) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{8}}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28\sqrt{8}}{81}$$

10. Visa att

$e^{\sin(x)\cos(x)} \leq \sqrt{e}$ (0/0/2)

$\sqrt{e} = e^{0,5}$ Vill visa $e^{\sin x \cdot \cos x} \leq e^{0,5} \Rightarrow$

$\sin x \cdot \cos x \leq 0,5$

$$VL = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)$$

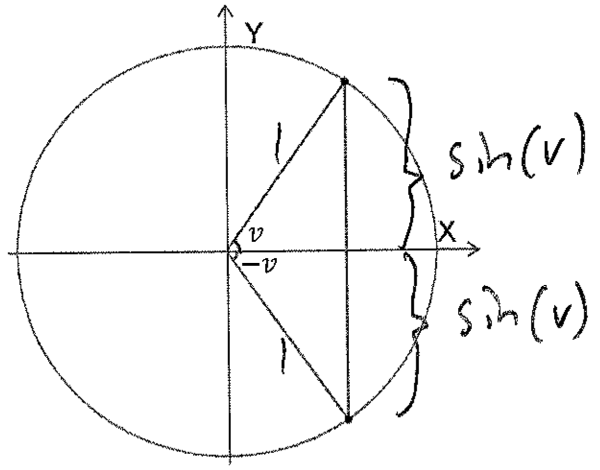
$$\left[\text{sin är alltid} \leq 1\right] \leq \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5 \quad \text{VSV.}$$

11. Figuren visar en enhetscirkel med en inritad triangel.

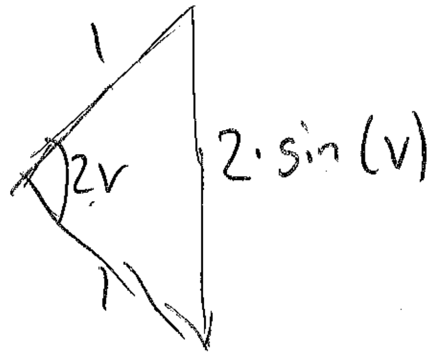
Använd figuren för att tillsammans med cosinussatsen och sinussatsen härleda formlerna för dubbla vinkeln:

$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v$

$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$ (0/0/3)



För triangeln gäller:



cos-satsen:

$(2\sin(v))^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos(2v)$

[Dela med 2]

$4\sin^2(v) = 2 - 2\cos(2v)$

[Lös ut cos(2v)]

$2\sin^2(v) = 1 - \cos(2v)$

[Trig. ettan]

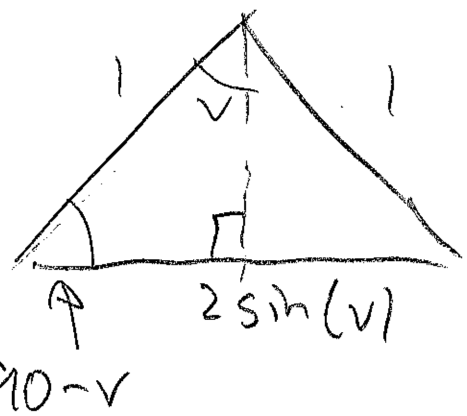
$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2(v) =$

$= \sin^2 v + \cos^2 v - 2\sin^2 v$

$= \cos^2 v - \sin^2 v$

VSV.

sin-satsen:



$$\frac{\sin(2v)}{2\sin(v)} = \frac{\sin(90-v)}{1}$$

$\sin(2v) = 2\sin(v)\cdot\sin(90-v)$

[$\sin(90-v) = \cos v$]

$= \sin(2v) = 2\cdot\sin(v)\cdot\cos(v)$ VSV