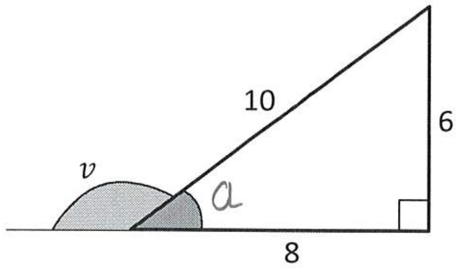
FACIT

3.5 Geometrisk problemlösning med trigonometriska formler

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Figuren visar en rätvinklig triangel med måtten 6, 8 och 10 och en yttervinkel, v.

   Bestäm med hjälp av figuren värdet av $\sin(v)$ (2/0/0)



$$\sin a = \frac{6}{10}$$

$$\cos a = \frac{8}{10}$$

$$\sin v = \sin(180 - a) =$$

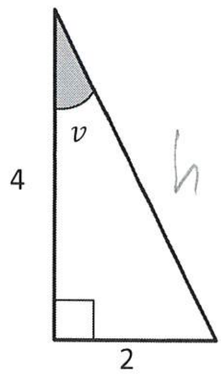
$$= \sin 180^\circ \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos 180^\circ =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin 180^\circ = 0 \\ \cos 180^\circ = -1 \end{bmatrix} = \sin a = \frac{6}{10}$$

2. Figuren visar en rätvinklig triangel med kateterna 2 och 4.

   Bestäm med hjälp av figuren värdet av $\cos(2v)$ (3/0/0)

   Svara exakt!



$$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v) =$$

[cos v och sin v fås genom att först bestämma hypotenusan med Pyth. sats: $h^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow h = \sqrt{20}$

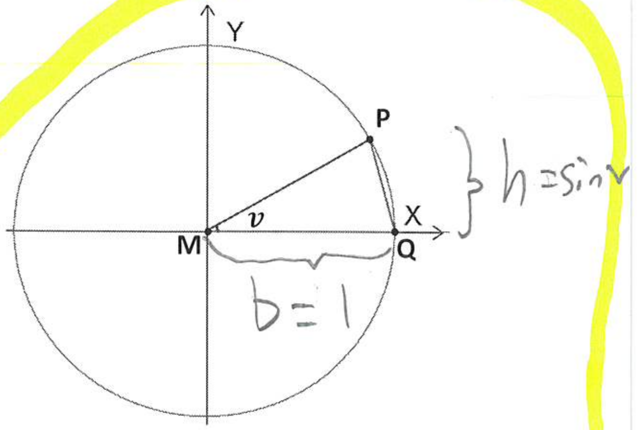
$\cos v = \frac{4}{\sqrt{20}}$ $\sin v = \frac{2}{\sqrt{20}}$] =

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{16}{20} - \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

3. Figuren visar en triangel inuti i en enhetscirkel. Triangeln har sina hörn i punkterna **P**, **Q** och **M**.
Punkt **M** är cirkelns medelpunkt och punkterna **P** och **Q** ligger på cirkeln, och **Q** har koordinaterna (1,0)

Visa att triangelns area kan bestämmas

med hjälp av formeln $A = \frac{|\sin(v)|}{2}$ (1/1/0)

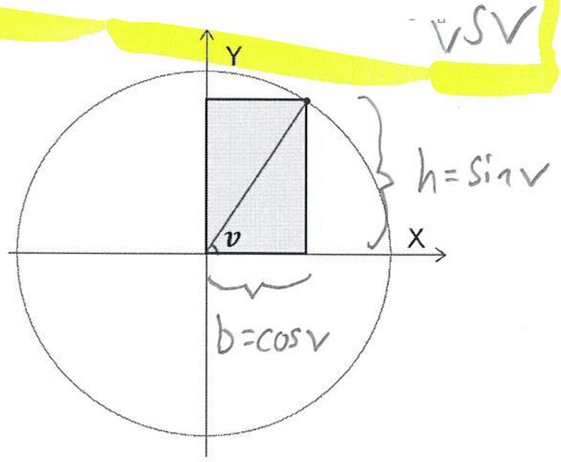


$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \sin(v)}{2}$$

sin (v) kan dock bli negativ, det kan inte en area, därav absolutbeloppet $\Rightarrow A = \frac{|\sin v|}{2}$

VSV

4. Figuren visar en enhetscirkel med en inritad rektangel.
Rektangeln har ett hörn i cirkelns medelpunkt, och det motsatta hörnet på cirkelns rand.
Rektangelns area kommer att variera med vinkel v.



a) För ett visst värde på v gäller att $\sin(2v) = \frac{4}{5}$

Bestäm för det värdet på v **rektangelns area**.
Svara exakt! (1/1/0)

$$A_{\square} = b \cdot h = \cos v \cdot \sin v$$

$$\left[\sin 2v = \frac{4}{5} \Rightarrow 2 \sin v \cos v = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin v \cos v = \frac{2}{5} \right]$$

$$= \frac{2}{5}$$

b) Undersök vilket som är det **största värde** som rektangelns area kan anta. (0/2/0)

$$A = \sin v \cdot \cos v = \frac{2 \sin v \cdot \cos v}{2} =$$

$$= \frac{\sin(2v)}{2}$$

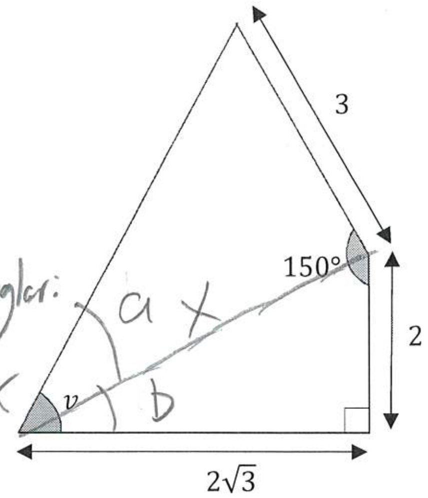
Största värdet av sin ( ) är 1

$\Rightarrow$ största värdet av arean $= \frac{1}{2}$

5. Figuren till höger visar en fyrhörning med några vinklar och mått angivna.

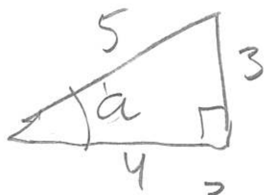
Bestäm med hjälp av figuren värdet av $\cos(v)$. (0/2/1)

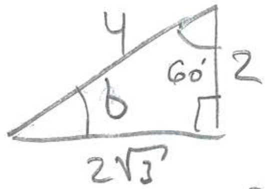
Svara exakt!



Dela in fyrhörningen i 2 trianglar:
De har en gemensam sida, x som fås med Pyth. sats

$x = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$





$\sin a = \frac{3}{5}$ $\qquad \sin b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos a = \frac{4}{5}$ $\qquad \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos v = \cos(a+b) =$

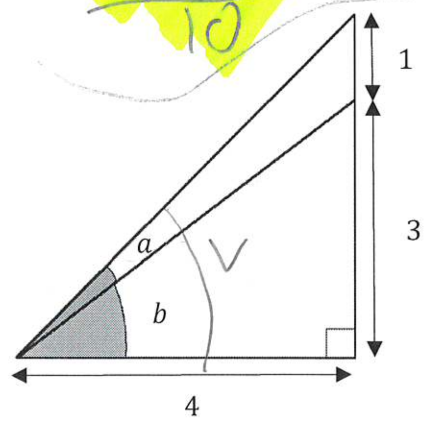
$= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b =$

$= \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}$

6. Figuren visar två trianglar med en gemensam sida. En av trianglarna är rätvinklig och några av måtten visas i figuren.

Bestäm med hjälp av figuren det exakta värdet av $cos(a)$ (0/2/1)

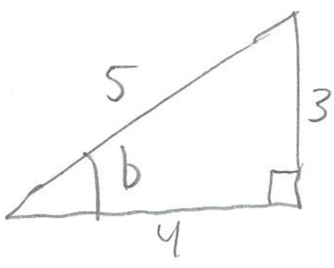


Den stora rätvinkliga triangeln har sidorna 4 och 4 $\Rightarrow V = 45°$

$a = 45° - b$

$\cos(a) = \cos(45° - b) = \cos 45° \cdot \cos b + \sin b \cdot \sin 45°$

$=$



$\sin b = \frac{3}{5}$ $\qquad \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

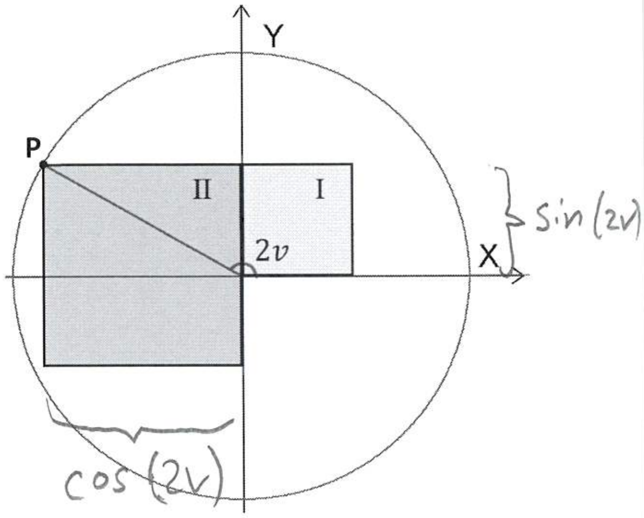
$\cos b = \frac{4}{5}$ $\qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$=$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$

7. Figuren visar en enhetscirkel med punkten **P** markerad.

Från x-axeln till punkten **P** bildas vinkeln $2v$.
I figuren har även två kvadrater markerats.
För dessa gäller följande:



Kvadrat I har ett hörn i punkten **P** och sidans längd utgörs av det *horisontella avståndet* mellan **P** och y-axeln.

Kvadrat II har ett hörn i origo och sidans längd utgörs av det *vertikala avståndet* mellan **P** och x-axeln.

Utgå från att $\cos(v) = \dfrac{1}{4}$ och bestäm med hjälp av figuren...

a) **summan** av de båda kvadraternas area. (0/2/0)

I: $A_{I} = \sin(2v)\cdot\sin(2v) = \sin^2(2v)$

II: $A_{II} = \cos(2v)\cdot\cos(2v) = \cos^2(2v)$

Summan: $A_I + A_{II} = \sin^2(2v) + \cos^2(2v) = \begin{bmatrix}\text{Trig.}\\ \text{ettan}\end{bmatrix} = 1$

b) **skillnaden** mellan den större den mindre kvadratens area. (0/2/1)

Skillnad $= A_{II} - A_I = \cos^2(2v) - \sin^2(2v)$

	sin	cos
2v	$\frac{1\cdot\sqrt{15}}{8}$	$-\frac{7}{8}$
v	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\sin(2v) = 2\cdot\sin v\cdot\cos v$
$= 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1$
$= 2\cdot\frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$

$= \left(-\frac{7}{8}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2 =$

$= \frac{49}{64} - \frac{15}{64} = \frac{17}{32}$

c) värdet av $2\cdot\cos(4v)$ (0/0/1)

$2\cdot\cos(4v) = 2\cdot\cos(2\cdot 2v) = 2\cdot\left(\cos^2(2v) - \sin^2(2v)\right)$

$= \begin{bmatrix}\cos^2(2v) - \sin^2(2v) = \frac{17}{32}\\ \text{enl. b)-uppg.}\end{bmatrix} = 2\cdot\frac{17}{32} = \frac{17}{16}$