FACIT

3.6 Derivatan av sinus och cosinus, via trig. formler

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Derivera funktionerna nedan

a) $f(x) = 2sin(x)$ (1/0/0)

$f'(x) = 2 \cdot \cos(x)$

Konstanten följer med

Derivatan av sin är cos

b) $g(x) = 4cos(2x)$ (1/0/0)

argumentet oförändrat

$g'(x) = 4 \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -8\sin(2x)$

Konstanten följer med

Derivatan av cos är −sin

inre derivata

c) $h(x) = \dfrac{\cos(4x)}{4}$ (1/0/0)

Derivatan av cos är −sin

inre derivata

$h'(x) = \dfrac{-\sin(4x) \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = -\sin(4x)$

argumentet oförändrat

konstanten följer med

2. Hitta en ***primitiv funktion*** till funktionerna nedan

a) $f(x) = \sin(x)$ (1/0/0)

Prim till sin är −cos

$F(x) = -\cos(x)$

b) $g(x) = \cos(2x)$ (1/0/0)

Prim till cos är sin

argumentet oförändrat.

$F(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$

Dela med inre derivatan

c) $h(x) = 3\cos(4x + 3)$ (1/0/0)

argumentet oförändrat

$H(x) = \dfrac{3\sin(4x+3)}{4}$

Konstanten följer med

Dela med inre derivatan

Skriv om med trig. formler innan derivering!

3. Derivera funktionerna nedan

a) $f(x) = 4 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ (0/1/0)

$= 2 \cdot 2 \sin x \cos x = \left[\begin{array}{c}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för sin}\end{array}\right] = 2 \cdot \sin(2x)$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4\cos(2x)$

konstanten följer med

argumentet oförändrat

inre derivata

b) $g(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \left[\begin{array}{c}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för cos}\end{array}\right] = \cos(2x)$ (0/1/0)

$g'(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$

derivatan av cos är −sin

inre derivata

c) $h(x) = 4{,}6 \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 0{,}4 \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$ (0/1/0)

Derivera term för term.

$h' = 4{,}6 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \cdot \frac{1}{2} + 0{,}4 \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right)\right) \cdot \frac{1}{2} =$

konstanten följer med

argumentet oförändrat

inre derivata

konstanten följer med

argumentet oförändrat

inre derivata

$= 2{,}3\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - 0{,}2\sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

4. Använd additionsformlerna och bestäm ett exakt värde på $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ om

$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) + \sin(2x) \cdot \cos(x)$ (0/2/0)

"Jmf med $\underset{\sin}{a}\ \underset{\cos}{b} + \underset{\sin}{b}\ \underset{\cos}{a}$" $\Rightarrow f(x) = \sin(a + b)$ där $a = x$ och $b = 2x$

$f(x) = \sin(x + 2x) = \sin(3x)$

$F(x) = \frac{-\cos(3x)}{3}$

argumentet oförändrat

prim till sin är −cos

dela med inre derivatan

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\cos(\pi)}{3} = \frac{-(-1)}{3} = +\frac{1}{3}$

$\cos\pi = -1$

Skriv först om med trig. formler

5. Derivera OCH hitta en primitiv funktion

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{3} = \dfrac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{6} = \dfrac{\sin(2x)}{6}$ (0/2/0)

$F(x) = \dfrac{-\cos(2x)}{6 \cdot 2} = \dfrac{-\cos(2x)}{12}$

konstanten följer med

inre derivata

$f'(x) = \dfrac{\cos(2x)}{6} \cdot 2 = \dfrac{\cos(2x)}{3}$

b) $g(x) = \sin^2(3x) + x^2 + \cos^2(3x) = \left[\begin{matrix}\text{Trig.} \\ \text{ettan!}\end{matrix}\right] = 1 + x^2$ (0/2/0)

$G(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$

$g'(x) = 0 + 2x = 2x$

6. Hitta en **primitiv funktion** till

a) $f(x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för cos}\end{matrix}\right] = \cos(4x)$ (0/1/0)

$F(x) = \dfrac{\sin(4x)}{4}$

Dela med inre derivatan

d) $g(x) = \dfrac{\cos(3x) \cdot \cos(2x) + \sin(2x) \cdot \sin(3x)}{5}$ (0/0/1)

Add. formel ⇒ "cos cos + sin sin" ⇒ $\cos(a - b)$

där $a = 3x$ $b = 2x$

$g(x) = \dfrac{\cos(3x - 2x)}{5} = \dfrac{\cos(x)}{5}$

$G(x) = \dfrac{\sin(x)}{5}$

konstanten följer med

6. Bestäm värdet av gränsvärdet nedan. *Svara exakt!* (0/0/1)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{h}$$

Jmf med derivatans definition: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\Rightarrow f(a+h) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)$

$\Rightarrow f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

$a = \frac{\pi}{6}$

Alltså söks $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

om $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

$\Rightarrow$

$f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{2}\cdot 2 = \cos(2x)$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

7. Bestäm värdet av $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ om (0/0/2)

$f(x) = \sin(2x)\cdot\cos(4x)\cdot\cos(2x)$

$= \sin(2x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos(4x) =$

$= \frac{2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos(4x)}{2} = \left[\begin{array}{c}\text{Dubbla vinkeln}\\ \text{för sin}\end{array}\right] =$

$= \frac{\sin(4x)\cdot\cos(4x)}{2} = \frac{2\cdot\sin(4x)\cdot\cos(4x)}{4} =$

$= \left[\begin{array}{c}\text{Dubbla vinkeln}\\ \text{för sin - igen!}\end{array}\right] = \frac{\sin(8x)}{4}$

$F(x) = \frac{-\cos(8x)}{4\cdot 8} = \frac{-\cos(8x)}{32}$

Konstanten följer med

Dela med inre derivatan

$[\cos(2\pi) = 1]$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{32} = \frac{-1}{32}$