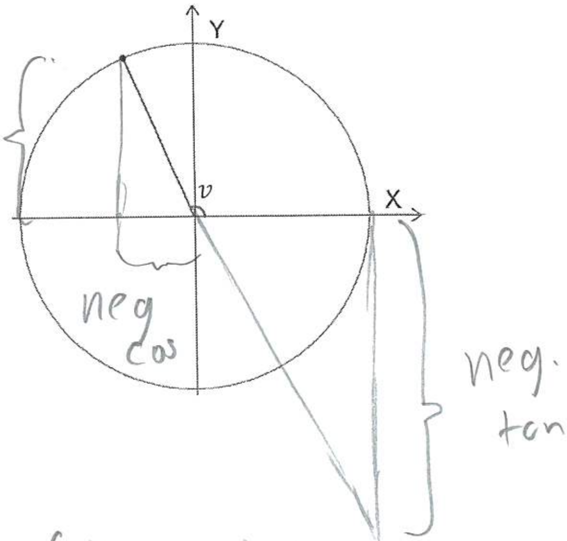
FACIT

3.7 Repetition om trigonometriska formler

Del 1a – Utan digitala hjälpmedel – Endast svar

1. Figuren visar en enhetscirkel med en vinkel v markerad. Ange för vart och ett av de tre värdena $\sin(v)$, $\cos(v)$ och $\tan(v)$ om de är positiva eller negativa värden genom att sätta rätt olikhetstecken nedan.

pos sin



Svar: $\sin(v)$ > 0

$\cos(v)$ < 0

$\tan(v)$ < 0 (1/0/0)

2. För en viss vinkel v gäller att $\sin(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\cos(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

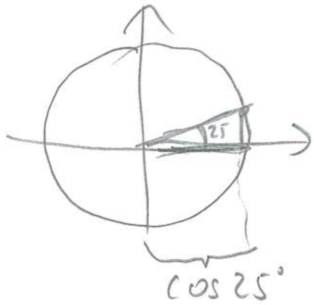
(kan också lösas genom att identifiera $v = 45°$)

Bestäm värdet av $\sin(2v)$

$2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$
$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

Svar: 1 (1/0/0)

3. Nedan visas ett antal trigonometriska uttryck, markerade **A - F**. Vilka **två** av dessa ger samma värde som $\cos(25°)$?



A $\sin(25°)$ **B** $\cos(145°)$ **C** $\cos(-25°)$

D $\sin(-25°)$ **E** $\cos(385°)$ **F** $\cos(-145°)$

Svar: C, E (2/0/0)

4. Derivera de trigonometriska funktionerna nedan.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x)$

Svar: $f' = 6\cos(3x)$ (1/0/0)

b) $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$

Svar: $g' = \cos(x) + \sin(x)$ (1/0/0)

c) $h(x) = \frac{1}{5}\cos^2\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{5}\sin^2\left(\frac{x}{5}\right)$

$= \frac{1}{5}(\cos^2 + \sin^2) = \frac{1}{5}$

Svar: $h' = 0$ (0/1/0)

d) $j(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

$= \sin(2x)$

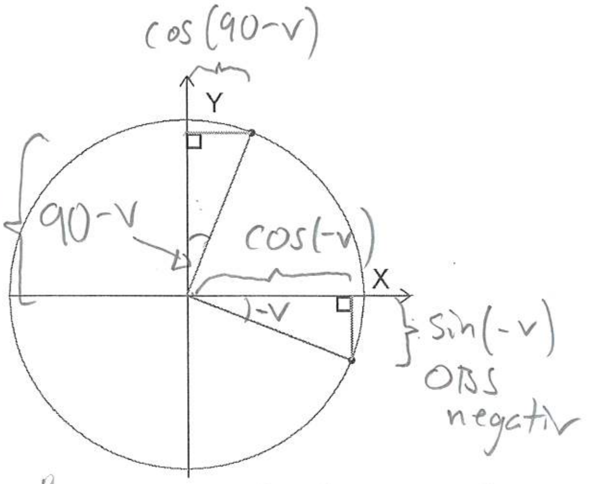
Svar: $j' = 2\cos(2x)$ (0/1/0)

5. Bestäm värdet av $\sin^2(40°) + \sin(30°) + \cos^2(40°)$ $= \left[\begin{array}{l}\text{Trig. ettan:} \\ \sin^2(40°) + \cos^2(40°) = 1\end{array}\right] = 1 + \sin 30°$

$1 + 0{,}5 = 1{,}5$

Svar: 1,5 (1/0/0)

6. Figuren visar en enhetscirkel med två likadana rätvinkliga trianglar markerade.
Figuren kan användas för att visa två stycken trigonometriska identiteter.
Vilka två trigonometriska identiteter är det?



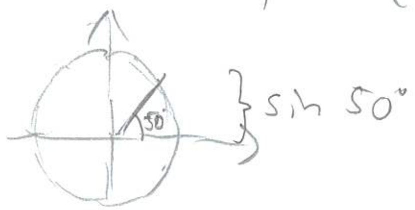
Svar: $\cos(90-v) = -\sin(-v)$

$\sin(90-v) = \cos(-v)$ (1/1/0)

"Kortsida": $-\sin(-v) = \cos(90-v)$

"Långsida": $\cos(-v) = \sin(90-v)$

7. Nedan visas ett antal trigonometriska uttryck, markerade **A** - **F**.
Vilket eller vilka av dessa ger samma värde som $\sin(50°)$?

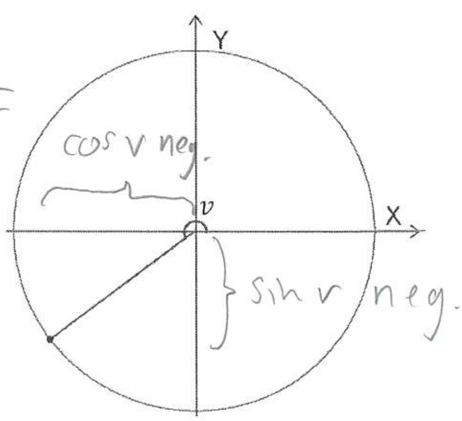


A $\sin(-50°)$ **B** $\sin(130°)$ **C** $\sin(40°)$

D $\cos(-50°)$ **E** $\cos(130°)$ **F** $\cos(40°)$

Svar: B, F (1/1/0)

8. Figuren till höger visar en vinkel, v, för vilken det gäller att $\cos(v) = -\frac{4}{5}$ $\Rightarrow \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$



Bestäm det exakta värdet av...

a) $\sin(2v) = 2 \cdot \sin v \cdot \cos v = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

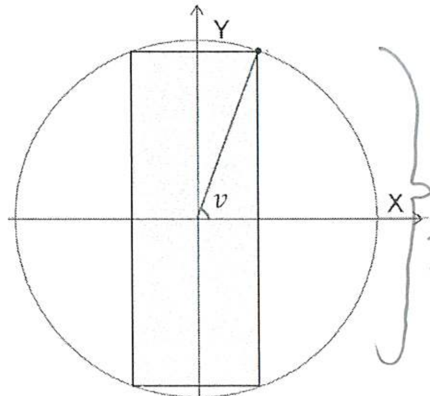
Svar: $+\frac{24}{25}$ (0/1/0)

b) $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$

Svar: 3/4 (0/1/0)

$A = B \cdot H = 4 \sin v \cos v =$
$= 2 \cdot 2 \sin v \cos v = 2 \sin(2v)$

9. Figuren visar en enhetscirkel med vinkeln v markerad. I enhetscirkeln har en rektangel ritats ut, där rektangelns hörn ligger på cirkeln och cirkelns centrum utgör centrum av rektangeln. Bestäm ett uttryck för *arean* av denna rektangel.



$H = 2 \sin v$

$B = 2 \cdot \cos v$

Svar: $2 \cdot \sin(2v)$ (0/1/0)

---

10. För $\cos(v + 30°)$ gäller att:

$$\cos(v + 30°) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{16}$$

Bestäm ett möjligt exakt värde på konstanten a

$\cos(v + 30°) = \cos v \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \sin v =$

$= \begin{bmatrix} \cos 30° = \sqrt{3}/2 \\ \sin 30° = 1/2 \end{bmatrix} = \underset{a}{\cos v} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sin v}_{= \frac{1}{16}} \Rightarrow \sin v = \frac{1}{8}$

$\sin v = \frac{1}{8}$

$a = \cos v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{63}}{8}$

Svar: $a = \frac{\sqrt{63}}{8}$ (0/0/1)

11. Bestäm en *primitiv funktion* till $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2x) + \sin(2x) \cdot \cos(x)$

$f(x) = \sin(x + 2x)$
$= \sin(3x)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-\cos(3x)}{3}$

Svar: $-\frac{\cos(3x)}{3}$ (0/0/1)

12. Bestäm värdet av gränsvärdet nedan. *Svara exakt!*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{12} + h\right) - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h}$$

Jmf med derivatans defö $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Svar: -1 (0/0/1)

$\Rightarrow f(a+h) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12} + h\right) - 1$

$\Rightarrow f(x) = 2\cos^2(x) - 1 = \cos(2x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(2x) \cdot 2$

$a = \frac{\pi}{12}$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$

Del 1b – Utan digitala hjälpmedel – Motiveringar/Uträkningar krävs

13. Visa att $(\cos(x) + \sin(x))(\cos(x) - \sin(x)) = \cos(2x)$ (2/0/0)

$VL = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \left[\begin{matrix}\text{konjugat}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right] = \cos^2 x - \sin^2 x =$

$= \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln}\\ \text{för cos}\end{matrix}\right] = \cos(2x) = HL$ vsv.

14. För en vinkel i första kvadranten gäller att $\sin(v) = \frac{1}{4}$

Bestäm det exakta värdet av $\cos(v)$ (2/0/0)

"Vet den ena söker den andra" ⇒ Trig. ettan

$\cos v = +\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Första kvadranten

15. Lös ekvationen $\cos^2(50°) + x + \sin^2(50°) = 3 - \cos(60°)$ (2/0/0)

$\cos^2(50) + \sin^2(50) = 1$ [Trig ettan] $\Rightarrow 1 + x = 3 - \frac{1}{2}$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$x = 1{,}5$

16. Visa att $\frac{1 - \cos(2x)}{2} = \sin^2(x)$ (1/1/0)

$VL = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln:}\\ \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x\end{matrix}\right] = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2} =$

$= \frac{2\sin^2 x}{2} = \sin^2 x = HL$ vsv.

17. Bestäm det exakta värdet av $\sin(255°)$ (0/3/0)

$\sin(255°) = \sin(135° + 120°) = $ [Add. formel för sin] $=$

$= \sin 135° \cdot \cos 120° + \sin 120° \cdot \cos 135° =$

$= \left[\begin{array}{l} \text{FB:} \\ \sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 120° = -\frac{1}{2} \\ \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

---

18. För en vinkel i andra kvadranten, v, gäller att $\sin(v) = \frac{2}{3}$

Bestäm det exakta värdet av $\sin(v - 30°)$ (0/2/0)

Andra kvadranten $\Rightarrow$ cos neg. $\cos v = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin(v - 30°) = \sin(v) \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos(v) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$

$= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{6}$

19. Förenkla uttrycket $2\sin(x + 30°) - \sin(x - 30°)$ så långt som möjligt. (0/2/0)

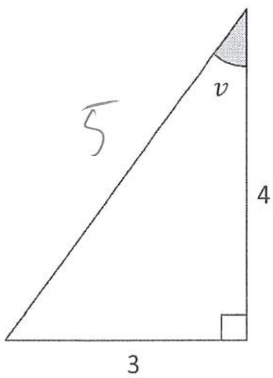
$2\sin(x+30°) - \sin(x-30°) = $ [Add. formler för sin]

$2(\sin x \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos x) - (\sin x \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos x)$

$= \sin x \cdot \cos 30° + 3 \cdot \sin 30° \cdot \cos x = \left[\begin{array}{l} \text{FB} \\ \sin 30° = \frac{1}{2} \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{3}{2} \cdot \cos x$

20. Figuren visar en rätvinklig triangel. Använd figuren för att bestämma ett exakt värde på $\cos(v + 45°)$ (0/2/0)



Pyth. sats $\Rightarrow$ Hyp $= \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\sin v = \frac{3}{5}$

$\cos v = \frac{4}{5}$

$\cos(v + 45°) = \cos v \cdot \cos 45° - \sin 45° \cdot \sin v$

$= \left[\begin{array}{l} \text{FB} \\ \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} =$

$= \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

21. Bestäm en *primitiv funktion* till $f(x) = \sin^2(x)$ (0/1/2)

Skriv om $\sin^2 x$ mha dubbla vinkeln för cos:

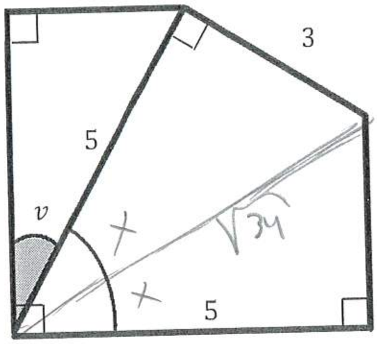
$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

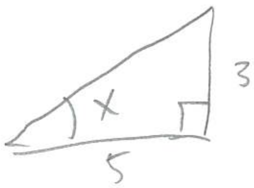
Prim till $\frac{1-\cos(2x)}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}$

22. Figuren nedan visar en femhörning med några vinklar och sträckor givna.

Bestäm värdet av $\sin(v)$ (0/2/1)



Dela in i två trianglar:



Pyth. sats ger hypotenusan: $\sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$\sin x = \frac{3}{\sqrt{34}}$ $\cos x = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin(v) = \sin(90^\circ - 2x) = \left[\begin{matrix}\text{Add. formel för} \\ \sin\end{matrix}\right]$

$= \sin 90^\circ \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 90^\circ = \left[\text{FB: } \begin{matrix}\sin 90^\circ = 1 \\ \cos 90^\circ = 0\end{matrix}\right]$

$= \cos 2x = \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för } \cos\end{matrix}\right] = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{25}{34} - \frac{9}{34} = \frac{16}{34}$

23. På formelbladet finns färdiga formler för den s.k. "dubbla vinkeln", både för sinus och cosinus. Det finns även formler för den s.k. "trippla vinkeln".

Visa att "trippla vinkeln" för cosinus kan skrivas,

$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ (0/1/2)

$VL = \cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 2x =$

$= \left[\begin{matrix}\text{Dubbla vinkeln} \\ \text{för sin och cos}\end{matrix}\right] = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - \sin x \cdot 2\sin x \cos x =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \left[\begin{matrix}\text{Trig. ettan} \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\end{matrix}\right]$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x = HL$ vsv.

24. För vinkeln $18°$ gäller att $\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Bestäm det exakta värdet av $\sin(36°)$

(0/1/2)

$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 18° = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \left[(\sqrt{5}-1)^2 = 5-2\sqrt{5}+1\right]$

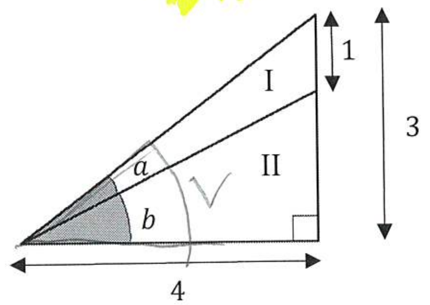
$= \sqrt{1 - \frac{(5-2\sqrt{5}+1)}{16}} = \left[1 = \frac{16}{16}\right] =$

$= \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{(5-2\sqrt{5}+1)}{16}} = \left[- \text{ framför } (\;)\right]$

$= \sqrt{\frac{16-5+2\sqrt{5}-1}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\sin(36°) = \sin(2\cdot 18°) = 2\cdot\sin 18°\cdot\cos 18° = \frac{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

25. Figuren visar de två trianglarna I och II, med en gemensam sida.
Triangel II är rätvinklig, och några av måtten visas i figuren.



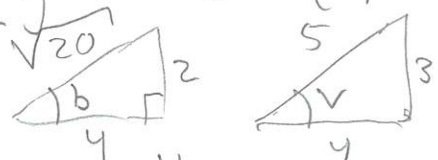
Bestäm med hjälp av figuren det exakta värdet av $tan\ (a)$

(0/0/3)

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

Låt v vara $(a+b)$

Då gäller $\sin(a) = \sin(v-b) = \sin v\cdot\cos b - \sin b \cos v =$



$= \left[\cos b = \frac{4}{\sqrt{20}} \quad \cos v = \frac{4}{5} \quad \sin b = \frac{2}{\sqrt{20}} \quad \sin v = \frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5\sqrt{20}}$

$\cos(a) = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5\sqrt{20}}\right)^2} = \sqrt{\frac{500-16}{500}}$

$= \sqrt{\frac{484}{500}} = \frac{\sqrt{484}}{5\sqrt{20}}$

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{4}{5\sqrt{20}}}{\frac{\sqrt{484}}{5\sqrt{20}}} = \frac{4}{\cancel{5\sqrt{20}}}\cdot\frac{\cancel{5\sqrt{20}}}{\sqrt{484}} = \frac{4}{\sqrt{484}} = \frac{2}{11}$