FACIT

4.2 Produktregeln (och kedjeregeln)

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = x \cdot e^x$ (1/0/0)

$$f' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

Derivatan till x

Derivatan till e^x

---

b) $f(x) = \underbrace{3\sin(x) \cdot \cos(x)}_{\text{produkt.}} + \sin(3x)$ (2/0/0)

$$f' = 3 \cdot \cos x \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x \cdot (-\sin x) + 3\cos(3x)$$

Derivatan till sin x

Derivatan till cos x

Derivatan till sin(3x)

$$= 3(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos(3x)$$

---

c) $f(x) = e^{2x} \cdot (4 - x^2)$ (2/0/0)

$$f' = 2e^{2x} \cdot (4-x^2) + e^{2x} \cdot (-2x) = e^{2x}(2(4-x^2) - 2x)$$

Derivatan till e^{2x}

Derivatan till $(4-x^2)$

d) $f(x) = \cos^2(3x)$ (1/1/0)

→ Prod. regeln

$$f = \cos(3x) \cdot \cos(3x)$$

$$f' = -3\sin(3x) \cdot \cos(3x) + \cos(3x) \cdot (-3\sin 3x)$$

$$= 2 \cdot (-3\sin(3x) \cdot \cos(3x)) =$$

$$= -6\sin(3x) \cdot \cos(3x)$$

→ kedjeregeln

$(\quad)^2$

$\cos(\quad)$

$3x$

$$f' = 2 \cdot (\cos(3x))^1 \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3$$

$$= -6\sin(3x) \cdot \cos(3x)$$

2. Visa att derivatan av $f(x) = x^2$ är $f'(x) = 2x$ med hjälp av **produktregeln** (1/0/0)

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^2 = x \cdot x \\ f'(x) &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivatan} \\ \text{av } x}}{1} \cdot x + x \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivatan} \\ \text{av } x}}{1} = 2 \cdot x \end{aligned}}$$

usv.

3. Vissa funktioner kan deriveras med både kedjeregeln och produktregeln.

a) Visa att funktionen $f(x) = \sin^3(x)$ är en sådan genom att härleda derivatan med hjälp av båda reglerna. (2/1/0)

<u>Prod. regeln</u>

$f = \sin x \cdot \sin x \cdot \sin x$ $\left(\begin{matrix} 3 \text{ funk} \\ \Rightarrow \\ 3 \text{ termer} \end{matrix}\right)$

$f' = \underbrace{\cos x \cdot \sin x \cdot \sin x}_{(1)} + \underbrace{\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x}_{(2)}$

$+ \underbrace{\sin x \cdot \sin x \cdot \cos x}_{(3)} =$

$= 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$

<u>Kedjeregeln</u>

$f = (\sin x)^3$

$f' = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot \cos x$

b) Visa att oavsett hur funktionen f ser ut så kommer funktionen $g = f^3$ att vara en funktion där derivatan kan fås med både produktregeln och kedjeregeln. (0/2/0)

<u>Prod. regeln</u>

$g = f \cdot f \cdot f$

$g' = \underline{f' \cdot f \cdot f} + \underline{f \cdot f' \cdot f} + \underline{f \cdot f \cdot f'}$

$=$ "3 st $f^2 \cdot f'$" $=$

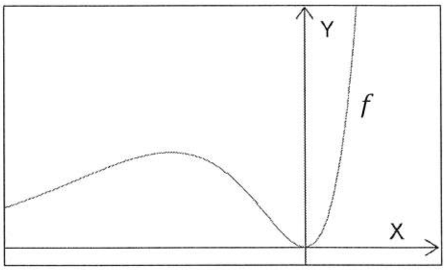
$= 3 \cdot (f)^2 \cdot f'$

<u>Kedjeregeln</u>

$g = (f)^3$

$g' = 3 \cdot (f)^2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Derivatan till } f \\ \text{(inre derivata)}}}{f'}$

4. Grafen till funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ visas till höger.



Funktionen har ett lokalt maximum.

Bestäm koordinaterna för detta maximum. (0/3/0)

Svara exakt!

$f' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut}\\ x \cdot e^x\end{matrix}\right] = xe^x(2+x)$

Maximum

$\Rightarrow f' = 0 \Rightarrow x \cdot e^x(2+x) = 0$

Nollprod. $\Rightarrow$ $x = 0$ (ger minimum enl. grafen) $\quad 2+x=0 \quad x=-2$ (ger maximum enl. grafen)

y-koord $= f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = 4e^{-2}$

Koord: $(-2, 4e^{-2})$

---

5. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 5x(4 - x^3)^4$ (0/2/0)

$f' = 5 \cdot (4-x^3)^4 + 5x \cdot \underline{4 \cdot (4-x^3)^3 \cdot (-3x^2)}$

Derivatan av $5x$

Derivatan av $(4-x^3)^4$

OBS! Kräver kedjeregeln.

b) $f(x) = e^x \cdot \sin(x) \cdot (x^2 - 2x)$ (0/2/0)

3 funk $\Rightarrow$ 3 termer

$f' = e^x \cdot \sin x \cdot (x^2-2x) + e^x \cdot \cos x \cdot (x^2-2x)$

Derivatan av e^x

Derivatan av $\sin x$

$+ e^x \cdot \sin x \cdot (2x-2) = e^x\left(\sin x(x^2-2x) + \cos x(x^2-2x) + \sin x(2x-2)\right)$

Derivatan av (x^2-2x)

$= e^x\left(\sin x(x^2-2) + \cos x(x^2-2x)\right)$

6. Bestäm $f'(x)$ om

$$f(x) = x\left(\sin(x) \cdot e^{x^2}\right)^3$$ (0/0/2)

$$f' = 1 \cdot \left(\sin x \cdot e^{x^2}\right)^3 + x \cdot \underbrace{3\left(\sin x \cdot e^{x^2}\right)^2 \cdot \left(\cos x \cdot e^{x^2} + \sin x \cdot e^{x^2} \cdot 2x\right)}_{\text{Derivatan av } \left(\sin x \cdot e^{x^2}\right)^3}$$

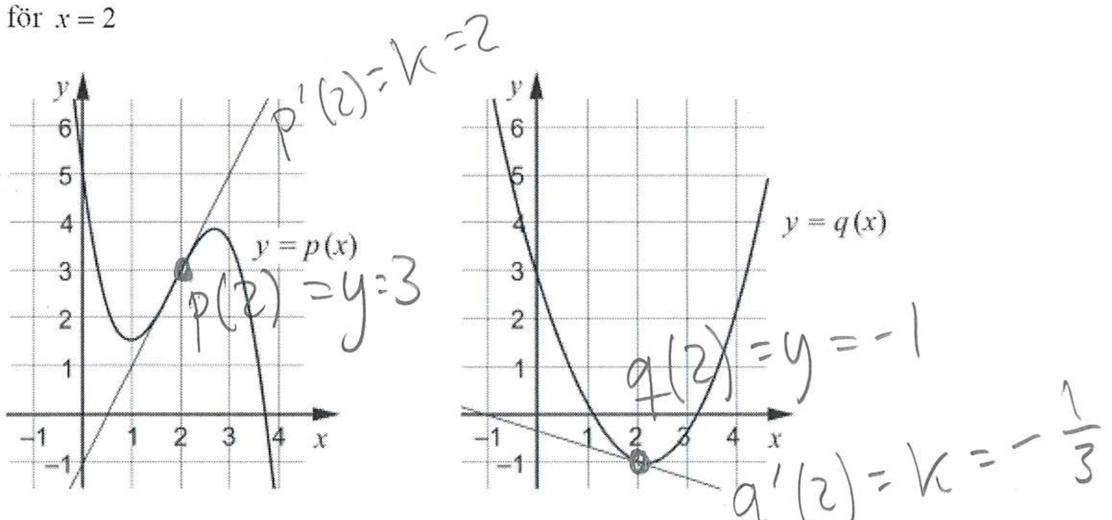
Derivatan av x

OBS! inre derivatan är en produkt

Detta kan säkerligen förenklas, och skrivas om t.ex genom att bryta ut $\left(\sin x \cdot e^{x^2}\right)^2$ men dessa varianter orkar jag ej skriva här.

7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

$r' = p' \cdot q + p \cdot q' \Rightarrow$

$r'(2) = p'(2) \cdot q(2) + p(2) \cdot q'(2) =$

Ur graferna fås:
$p'(2) = 2 \quad q'(2) = -\frac{1}{3}$
$p(2) = 3 \quad q(2) = -1$

$= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$

$= -2 - 1 = -3$

8. Bestäm en *primitiv funktion* till

a) $g(x) = -x^2 e^{x^3}$ (0/0/1)

Kedjeregeln baklänges:

Utgå från $G = a \cdot e^{x^3}$

$\Rightarrow G' = a \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 =$

$= 3ax^2 e^{x^3}$

$\Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow G = -\frac{e^{x^3}}{3}$

b) $h(x) = 2e^{4x}(-x \sin(x^2) + 2\cos(x^2))$ (0/0/1)

Produktregeln baklänges.

Gångra in $2e^{4x}$ i ( )

$\Rightarrow h = 2e^{4x} \cdot (-\sin x^2) \cdot x + 4e^{4x} \cdot \cos x^2$

$= 4e^{4x} \cdot \cos x^2 + e^{4x} \cdot \underbrace{(-\sin x^2) \cdot 2x}_{\text{Derivatan av } g}$

Derivatan av f — g oderiverad — f oderiverad

$H = e^{4x} \cdot \cos x^2$

9. För funktionen $f(x) = g(x)^2$ gäller:

$g(3) = 4$ $g'(3) = 2/3$ $g''(3) = -3$

Bestäm $f''(3)$ (0/0/2)

$f = g \cdot g$

Prod. regeln: $f' = g' \cdot g + g \cdot g' = 2 \cdot g \cdot g'$

el. Kedjeregeln: $f' = 2 \cdot (g) \cdot g'$ inre derivata

Prod regeln av f' för att få f'': $f'' = 2 \cdot g' \cdot g' + 2 \cdot g \cdot g''$

Derivatan av g — Derivatan av g'

$f''(3) = 2 \cdot g'(3) \cdot g'(3) + 2 \cdot g(3) \cdot g''(3) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 4 \cdot (-3) = \frac{208}{9}$