FACIT

4.3 Några uppgifter om kvotregeln och $y = ln\ (x)$

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Bestäm värdet av nedanstående uttryck

a) $\ln(e) - \ln(1)$ (1/0/0)

$\ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - 0 = 1$

b) $f'(e)$ om $f(x) = x \cdot \ln(x)$ [Produktregeln] (2/0/0)

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Derivatan av x

Derivatan av ln x

$f'(e) = \ln e + 1 = 2$

c) $f'(1)$ om $f(x) = e \cdot \ln(x^3)$ (2/0/0)

$f'(x) = e \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = e \cdot \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3e}{x}$

Inre derivata

$f'(1) = \frac{3e}{1} = 3e$

2. Derivera funktionerna nedan [Kvotregeln]

a) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ (1/0/0)

$f' = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

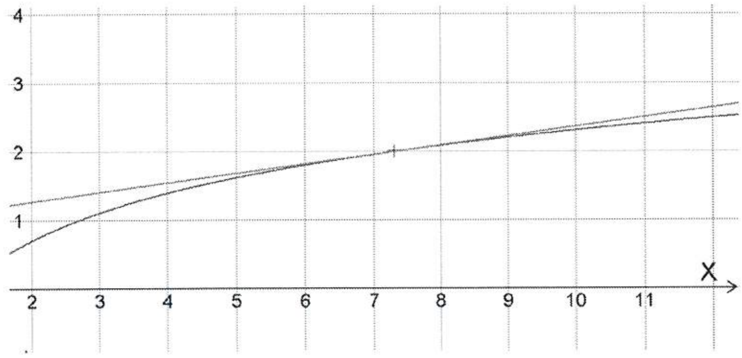
b) $g(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln(x)}$ (0/1/0)

Derivatan av sin(3x)

Derivatan av ln x

$g' = \frac{\cos(3x) \cdot 3 \cdot \ln x - \sin(3x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

3. Figuren visar grafen till funktionen $y = \ln(x)$ med en tangent inritad vid $x = e^2$.



Bestäm x-koordinaten för den punkt där tangenten skär x-axeln. (2/1/0)

Tangeringspunkt $(e^2, \ln e^2 = 2)$

Lutningen ges av $f'(e^2)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

$\boxed{(e^2, 2) \quad k = \frac{1}{e^2}} \Rightarrow$ "$kx + m = y$"

$\frac{1}{e^2} \cdot e^2 + m = 2 \Rightarrow$

$1 + m = 2 \Rightarrow m = 1$

Skärningen med x-axeln

$\Rightarrow y = 0$

$\frac{1}{e^2} x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -e^2$

4. Visa att derivatan av $y = \tan(x)$ kan skrivas som

både $y' = \tan^2(x) + 1$ och $y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$ (1/2/0)

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Derivatan av $\sin x$ Derivatan av $\cos x$

y' fås mha kvotregeln: $y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$[1. \; y' = \tan^2 x + 1] = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$[2. \; y' = \frac{1}{\cos^2 x}] = [\text{Trig. ettan i täljaren}] = \frac{1}{\cos^2 x}$

VSV.

5. Vera Kvoth har fått i uppgift att bestämma derivatan av en kvot.

Hon kommer då fram till det korrekta svaret,

$$f'(x) = \frac{-4x(4-x^2)\,ln(x) - \frac{(4-x^2)^2}{x}}{(\,ln(x)\,)^2}$$

a) Vera försöker beräkna värdet av $f'(1)$, men får bara "ERROR".
Förklara varför för Vera. (1/0/0)

Nämnaren innehåller "ln x", vilket för x-värdet 1 ger $\ln 1 = 0$
Alltså, $f'(1)$ innebär en division med noll.

b) Vilken är kvoten som Vera har deriverat? (0/1/0)

Täljaren oderiverad

$$f'(x) = \frac{-4x(4-x^2)\cdot \ln x - (4-x^2)^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$\Rightarrow$ Täljaren $= (4-x^2)^2$

Nämnaren i kvadrat $\Rightarrow$ Nämnaren $= \ln x$

$$f = \frac{(4-x^2)^2}{\ln x}$$

6. Visa att derivatan för funktionen $g = \frac{1}{f^2}$ blir densamma genom de båda olika tänken:

1) Kvotregeln.

2) Omskrivning med "upphöjt till minus" och kedjeregeln (0/2/0)

Inre derivata till f

1. $$g' = \frac{0 \cdot f^2 - 1 \cdot 2 \cdot f \cdot f'}{(f^2)^2} = \frac{-2 \cdot f \cdot f'}{f^4} = \frac{-2 \cdot f'}{f^3}$$

2. $$g = (f)^{-2}$$

$$g' = -2 \cdot (f)^{-3} \cdot f' = -\frac{2f'}{f^3}$$

Inre derivata till f

VSV

7. Bestäm värdet av gränsvärdet $\lim_{h \to 0} \dfrac{\ln((4+h)^2) - \ln(16)}{h}$ (0/0/1)

Jmf med derivatans def:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\Rightarrow$ $f(x) = \ln(x^2)$, $a = 4$ $\Rightarrow$ Gränsvärdet motsvarar $f'(4)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \qquad f'(4) = \frac{1}{2}$$

8. Bestäm $f'(x)$ om $f(x) = \ln(\cos^2(4x))$ (0/0/1)

[Kedjeregeln]

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 2 \cdot \cos(4x) \cdot (-\sin 4x) \cdot 4$$

Derivatan av ln( )

Derivatan av ( )^2

Derivatan av cos( )

Derivatan av 4x

Detta kan förenklas till: $f'(x) = -8\tan(4x)$

9. Bestäm $f''(x)$ om $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$ (0/1/2)

Förenkla svaret så långt som möjligt

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut} \\ e^{x^2}\end{matrix}\right] = \frac{e^{x^2}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^2}$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Förkorta} \\ \text{bort } e^{x^2}\end{matrix}\right] = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot e^{x^2} - (1-2x^2) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut, och} \\ \text{förkorta, } e^{x^2}\end{matrix}\right] = \frac{-4x - 2x(1-2x^2)}{e^{x^2}} = \frac{4x^3 - 6x}{e^{x^2}}$$

10. För funktionerna f och g gäller att:

$f(2) = \pi$

$g(2) = 3$

$g'(2) = 1/3$

Funktionen $h(x)$ defineras som $h(x) = \tan\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$

För $h(x)$ gäller att $h'(2) = 2$

Bestäm $f'(2)$

Svara exakt! (0/0/3)

$$h' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{f}{g}\right)} \cdot \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)$$

Derivatan till tan ( )

Inre derivata (kvotregeln)

$$h'(2) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{f(2)}{g(2)}\right)}\left(\frac{f'(2)\cdot g(2) - f(2)\cdot g'(2)}{(g(2))^2}\right) = 2$$

$$\left[\begin{array}{l} f(2) = \pi \\ g(2) = 3 \\ g'(2) = \frac{1}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(\frac{f'(2)\cdot 3 - \pi \cdot \frac{1}{3}}{3^2}\right) = 2$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{enl. FB} \end{array}\right] \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(\frac{f'(2)\cdot 3 - \frac{\pi}{3}}{9}\right) = 2 \Rightarrow \frac{3\cdot f'(2) - \frac{\pi}{3}}{9} = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow 3\cdot f'(2) = \frac{9}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{9}$$