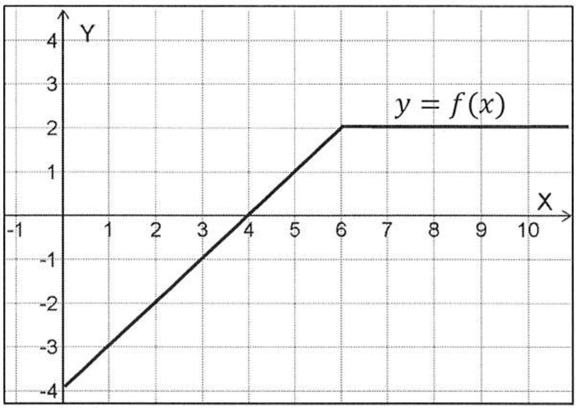
FAC IT

5.1 Integraler och areor

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Till höger visas grafen till funktionen f. Bestäm med hjälp av grafen...



a) värdet av $\int_0^6 f\,dx$ (1/0/0)

4

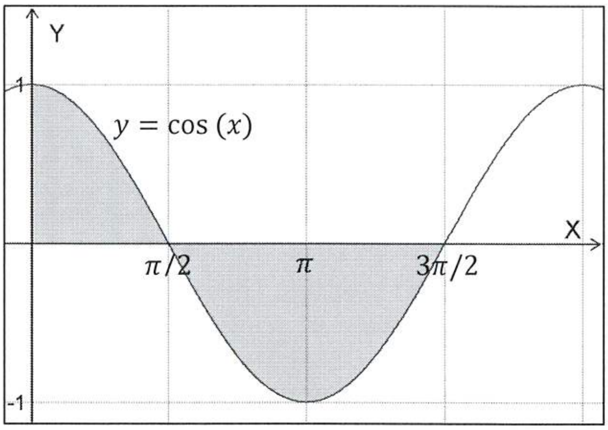
4 -8 + $+2$ = -6

b) det värde på a som löser $\int_0^a f\,dx = 0$ (1/0/0)

-8 + $+2$ + $+6$ $\Rightarrow$ $a = 9$

2. Till höger visas grafen till funktionen $y = \cos(x)$, där x anges i radianer.

I grafen finns ett markerat område.



a) Bestäm $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ (2/0/0)

$$= \Big[\sin x\Big]_0^{3\pi/2} = \sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0$$

$$= \begin{bmatrix} \text{FB:} \\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \\ \sin 0 = 0 \end{bmatrix} = -1 - 0 = -1$$

b) Bestäm **arean** av det markerade området. (2/0/0)

Arean består av tre st. .

En sådan fås av $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$

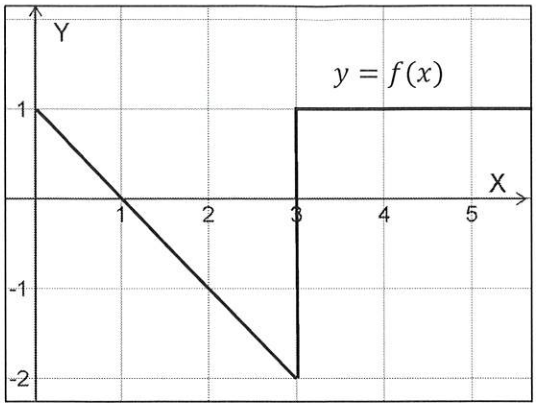
Arean blir 3 ae

(kan också inses av svaret i a)-uppgiften)

3. Grafen till höger visar funktionen f.
Ange de **positiva** lösningarna på a som gör att

$$\int_0^a f\,dx = 0$$

(1/1/0)



Det finns två svar:

$+0{,}5 + -0{,}5 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$

$+0{,}5 + -0{,}5 + -1{,}5 + +1{,}5 \Rightarrow a_2 = 4{,}5$

4. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

Agnes får svaret e
Ingela får svaret 0
Kerstin får svaret 1

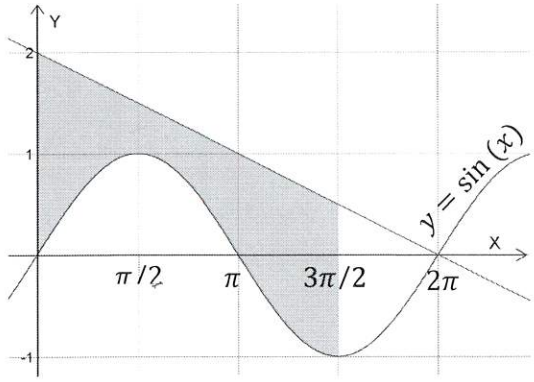
Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\text{Prim. till } 1/x \text{ är } \ln x\right]_1^e =$$

$$= \ln e - \ln 1 = \left[\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0\right]$$

$$= 1 - 0 = 1 \Rightarrow \text{Kerstin har räknat rätt.}$$

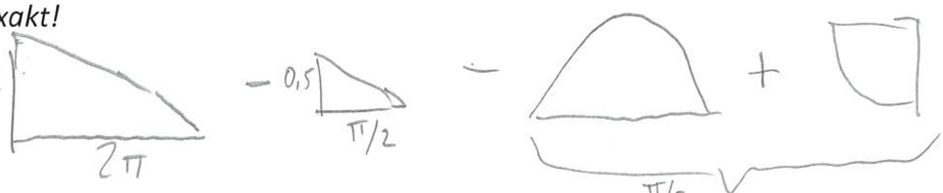
5. Figuren visar ett koordinatsystem med ett markerat område.



Bestäm arean av det markerade området nedan. (1/2/0)

Svara exakt!

A =



$$\frac{b\cdot h}{2} - \frac{b\cdot h}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[\cos x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \left[\begin{array}{l} \text{FB:} \\ \cos \pi/2 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{array}\right]$$

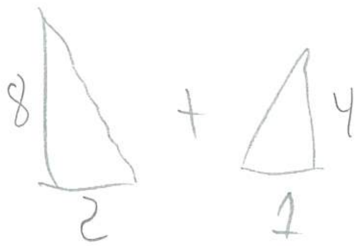
$$= 1$$

$$\frac{2\pi\cdot 2}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} - 1 = 2\pi - \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{15\pi}{8} - 1$$

6. Beräkna värdet av integralen $\int_0^3 |8 - 4x|\, dx$ (0/2/0)

Skissas grafen fås:

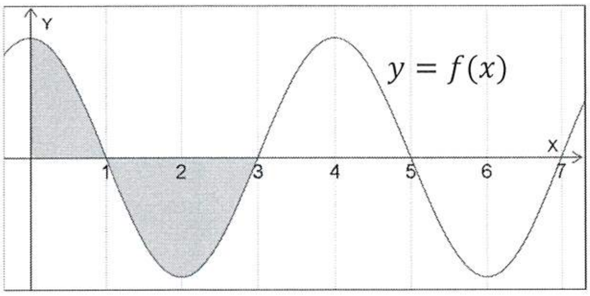
Integralen motsvarar arean av



dvs $\frac{2\cdot 8}{2} + \frac{1\cdot 4}{2} = 10$

(kan även lösas med prim. funktion, men då krävs fall indelning)

7. Nedan visas grafen till en trigonometrisk funktion på formen $f(x) = A\cos(kx)$ med en markerad area.



a) Bestäm alla positiva värden på konstanten a som löser olikheten $\int_0^a f\,dx < 0$ (0/2/0)

Integralen blir neg. om minusdelarna övervinner plusdelarna: Det sker om $a > 2$ men $a < 4$

dvs $2 < a < 4$.

Det kommer dock upprepas periodiskt:
$2 + 4n < a < 4 + 4n$

b) Bestäm det värde på A som gör att den markerade **arean** får värdet 4 (0/3/0)

Arean består av 3 st 

Om dessa ska ha arean 4 ska en av de ha arean $\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^1 A\cos(kx)\,dx = \frac{4}{3}$$

Enl. grafen är $P = 4 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$= A\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 =$$

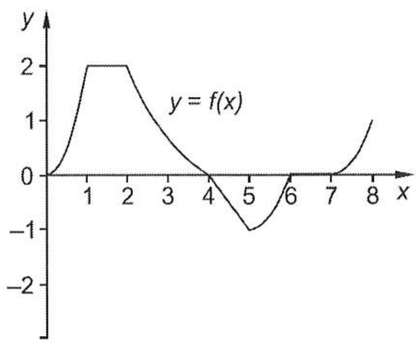
$$= A \cdot \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 0}{\frac{\pi}{2}}\right) = \left[\begin{matrix}\text{FB:}\\ \sin\frac{\pi}{2} = 1\\ \sin 0 = 0\end{matrix}\right] = A\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

8. Nedanstående uppgift är från ett gammalt Nationellt Prov. Lös uppgiften.

Funktionen $y = f(x)$ är given genom sin graf i figuren nedan. Vi bildar

funktionen $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; $0 \le x \le 8$



a) Avgör för vilket värde på x som funktionen A antar sitt största värde. (0/1/0)

b) Funktionen A är konstant i ett intervall.
Ange detta intervall och motivera ditt svar. (0/0/1)

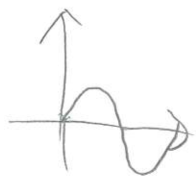
a) Funk. A beskriver integralen av f $\Rightarrow$ största värdet fås där $x=4$

b) Integralen kommer vara konstant i det intervall där ingen ny "teckenarea" läggs till. Det sker där $f=0 \Rightarrow 6 \le x \le 7$

9. Undersök om det är möjligt att hitta värden på konstanterna A och k så att (0/0/2)

$$\int_0^{\pi} A\sin(kx)\,dx = -1$$

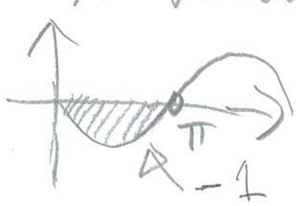
Om A är pos. kan $\int$ aldrig bli negativ om nedre gränsen är noll.



Om A däremot är negativ kan integralen bli neg. med nedre gräns 0

För att hitta en komb. välj ett värde på k, ex: $k=1$ och beräkna A-värdet.

$k=1 \Rightarrow \int_0^{\pi} A\sin x = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$



Ex: $k=1$ $A=-\frac{1}{2}$