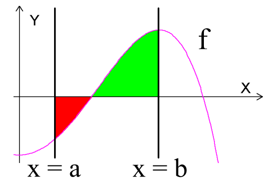
Integraler och areor

En integral motsvarar "teckenarean" av det område som fås av en funktionsgraf, x-axeln samt två stycken vertikala linjer.

Beteckning: $\int_a^b f\,dx$ =

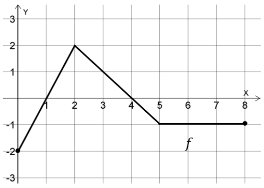


Alla bitar som hamnar under x-axeln räknas som negativa bidrag till integralen (det röda området i figuren ovan), och bitarna ovanför x-axeln räknas som positiva bidrag (det gröna området i figuren)

Exempel 1:

Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, som är definerad i intervallet $0 \le x \le 8$

Använd grafen för att svara på frågorna



a) Bestäm värdet av $\int_0^3 f(x)\,dx$

Svar:__________________________ (1/0/0)

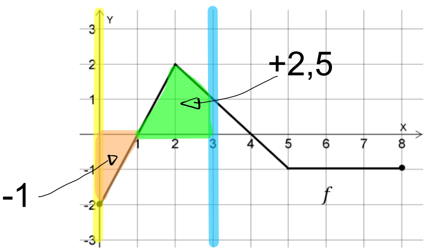
b) Bestäm vad a ska bytas ut mot för att lösa ekvationen nedan

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

Svar:__________________________ (1/1/0)

Lösning:

a) "högervägg" $\int_0^3 f(x)\,dx$ "vänstervägg"



Den gröna arean är större än den röda, integralen kommer bli positiv.

Negativt bidrag = -1

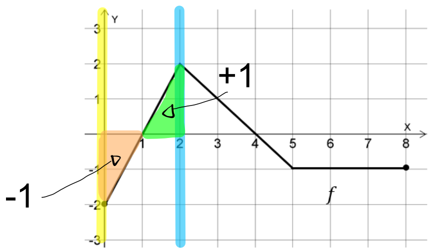
Positivt bidrag = +2,5

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 2{,}5 - 1 = 1{,}5$$

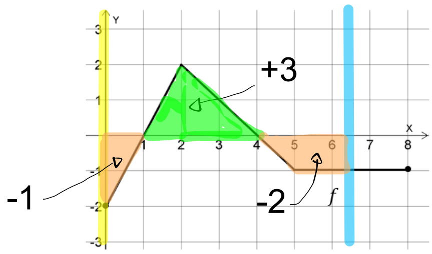
b) "högervägg" $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ "vänstervägg"

" Var ska högerväggen placeras för att det ska vara lika stor area över och under x-axeln om vänsterväggen placeras vid x=0? "

Det finns två svar!



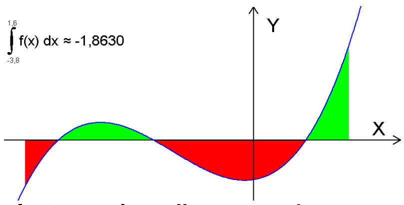
Fall 1: a = 2



Fall 2: a = 6,5

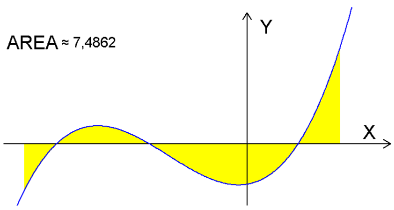
Skillnaden mellan Integraler och Areor är att integraler innehåller negativa bidrag, medan rena areaberäkningar alltid är positiva.

Se figuren nedan.



Integralen är negativ

(det är större negativa bidrag
än det är positiva.
"mer rött än grönt")



Arean är positiv

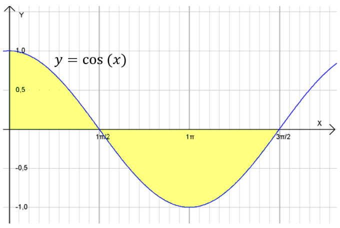
(alla bidrag, oavsett var de är
i förhållande till x-axeln, räknas
som positiva bidrag)

Integraler kan också beräknas via skillnaden i funktionsvärden hos den primitiva funktionen till funktionen där integralen finns.

Det handlar då om att beräkna den primitiva funktionens värde vid högerväggen samt vid vänsterväggen, och ta skillnaden mellan dessa värden:

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

Exempel 2: Bestäm arean av det gulmarkerade området nedan.

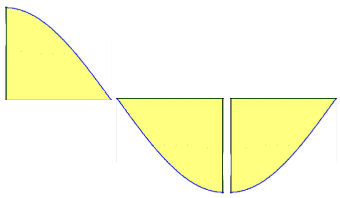


OBS! Uppgiften handlar om AREAN inte integralen.

Att beräkna integralen från 0 till 3π/2 skulle ge ett negativt svar (det är större "teckenarea" under x-axeln än det är över)

Utnyttja istället symmetrin i en trigonometrisk kurva.

Den här består av tre stycken "bullar"



Arean av en sådan kan fås via integralen $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$

Primitiv funktion till cos (x) är sin (x)

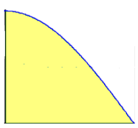
Dess värden vid "väggarna":

π/2 sin(π/2) = 1

0 sin (0) = 0

Skillnaden = 1 - 0 = 1

Vinkel v (grader) (radianer)	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



har arean 1

Den sökta arean, som bestod av "tre bullar" har alltså arean 3 ae