FACIT

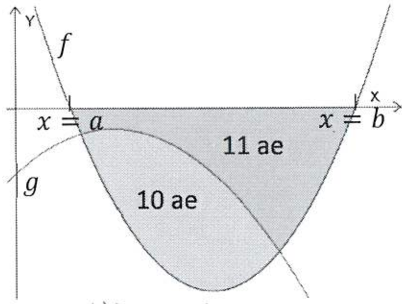
5.2 Areor mellan kurvor

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel

1. Figuren till höger visar två områden som begränsas av graferna till funktionerna f och g.

Områdenas areor är 10 ae respektive 11 ae. Se figur.

Bestäm värdet av $\int_a^b f(x)\,dx$ (1/0/0)



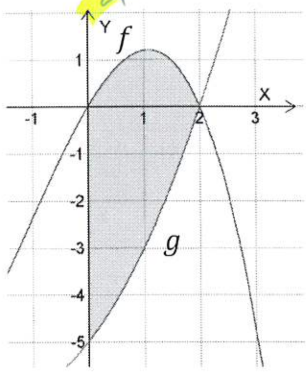
Integralen motsvarar den totala "Teckenarean" mellan a, b, x-axeln och funktionen f.

Total area = 10+11 = 21 under x-axeln

$\Rightarrow \int_a^b f\,dx = -21$

2. I figuren visas ett område som begränsas av funktionerna
$f(x) = -0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 + 2x$
$g(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5$
samt y-axeln

Teckna en integral som beskriver det markerade områdets area. (2/0/0)



Arean ges av $\int_a^b (\text{övre} - \text{nedre})\,dx$

a = 0 övre = f
b = 2 nedre = g

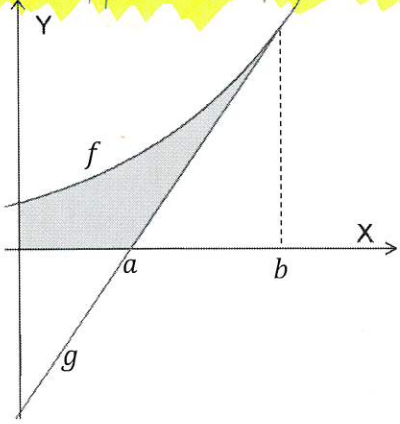
$\Rightarrow \int_0^2 \left(-0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 + 2x - (0{,}5x^2 + 1{,}5x - 5)\right)dx =$

$= \int_0^2 (-0{,}2x^3 - 1{,}1x^2 + 0{,}5x + 5)\,dx$

3. Figuren till höger visar de två funktionerna f och g och ett område som begränsas av dessa samt de positiva koordinataxlarna.

Talet b är skärningspunktens x-värde, och talet a är nollstället för g

Teckna ett uttryck som ger områdets area (0/1/0)



Det finns flera sätt att tänka:

$= \int_0^b f\,dx - \int_a^b g\,dx$

OBS. kan skrivas som en triangel

$= \int_0^a f\,dx + \int_a^b (f-g)\,dx$

4. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/1/0)

Figuren visar grafen till funktionen f

Vilket av alternativen A-E ger den sammanlagda arean av de områden som markerats i figuren?

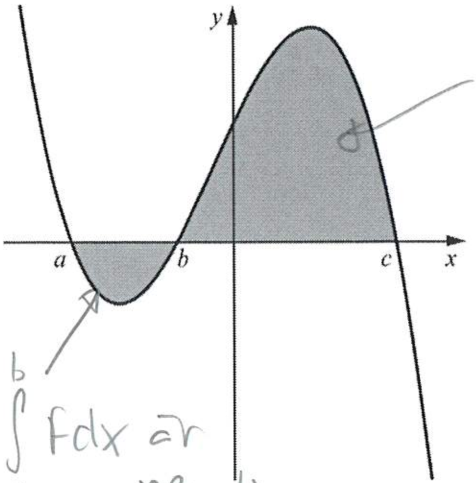
A. $\int_a^c f(x)\,dx$

B. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

C. $-\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

D. $-\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$

E. $-\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$



$\int_b^c f\,dx$ är positiv.

$\int_c^b f\,dx$ är negativ

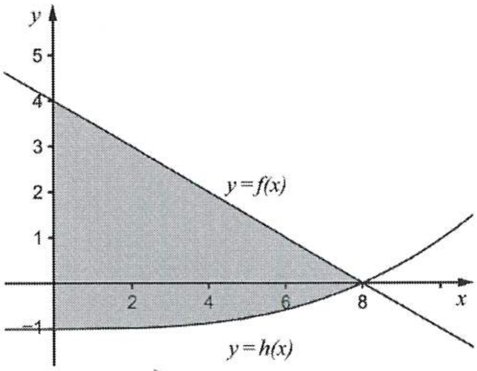
ALT C: $-\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$

$= -[\text{neg}] + [\text{pos}] = \text{Arean}$

5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Det område i figuren som begränsas av linjen $y = f(x)$, kurvan $y = h(x)$ och y-axeln har arean $\frac{65}{3}$ a.e.

Bestäm värdet av integralerna:



a) $\int_0^8 f(x)\,dx$ (1/0/0)

$\int_0^8 f\,dx =$ 

$= \left[\frac{B \cdot H}{2}\right] = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

b) $\int_0^8 h(x)\,dx$ (0/2/0)

$\int_0^8 h\,dx$ är enligt figuren negativ. Dess motsvarande area ska tillsammans med 16 bli $\frac{65}{3} \Rightarrow$

OBS! Minus.

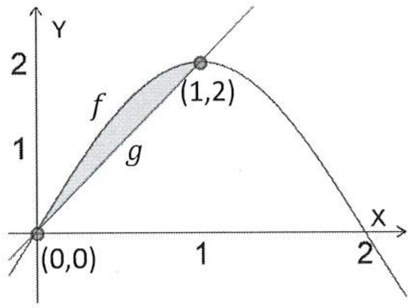
$16 + A = \frac{65}{3} \Rightarrow A = \frac{65}{3} - 16 = \frac{65}{3} - \frac{48}{3} = \frac{17}{3} \Rightarrow \int_0^8 h\,dx = -\frac{17}{3}$

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna.

$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ och $g(x) = 2x$

Punkterna (0,0) och (1,2) är skärningspunkter mellan funktionerna



Bestäm arean av området. (1/0/0)

Svara med 2 decimaler!

IntegralMellan$(f, g, 0, 1) \approx 0{,}27$ ae

(kan även fås via $\int_0^1 f\,dx - \int_0^1 g\,dx \approx 1{,}27 - 1 = 0{,}27$ ae)

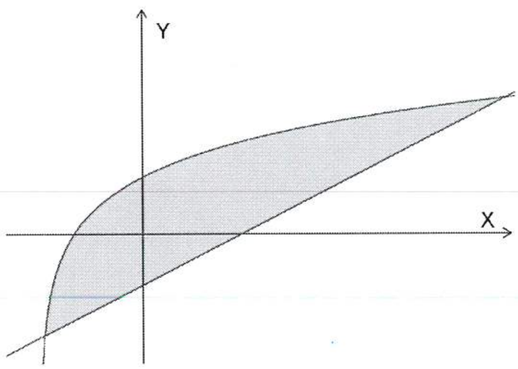
D2. Figuren visar graferna till de två funktionerna

$f(x) = \ln(0{,}2x + 0{,}4) + 2$

och

$g(x) = 0{,}5x - 1$

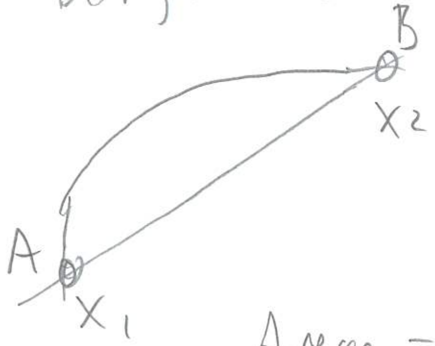
och ett område som begränsas av dessa grafer.



Bestäm arean av det markerade området. (2/0/0)

Svara med två decimaler

Börja med att hitta skärningspunkterna:



Skärning $\Rightarrow$ $x_1 \approx -1{,}9039$

$x_2 \approx 7{,}2249$

$\text{Arean} = \int_{x_1}^{x_2} f-g\,dx \approx \left[\text{IntegralMellan}(f, g, x(A), x(B))\right] \approx 12{,}14$ ae

D3. Figuren till höger visar graferna till

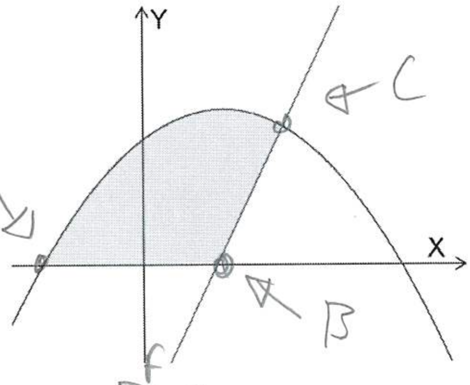
$f(x) = -0{,}5x^2 + x + 2$ och

$g(x) = 2{,}7x - 2{,}5$

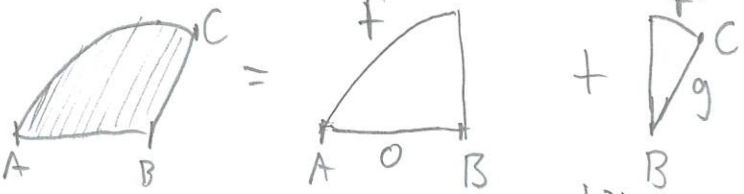
I figuren har ett område markerats.

Bestäm arean av området i figuren. (2/1/0)

Svara med tre decimalers noggrannhet!



Strategi:



Skärningspunkter:

$x(A) \approx -1{,}2361$

$x(B) \approx 0{,}9259$

$x(C) \approx 1{,}7482$

$$\int_{-1{,}2361}^{0{,}9259}(f-0)\,dx + \int_{0{,}9259}^{1{,}7482}(f-g)\,dx \approx$$

$$\left[\text{IntegralMellan}(f, 0, x(A), x(B)) + \text{IntegralMellan}(f, g, x(B), x(C))\right] \approx 4{,}615 \text{ ae}$$

$3{,}5417 + 1{,}073$

D4. Figuren till höger visar graferna till

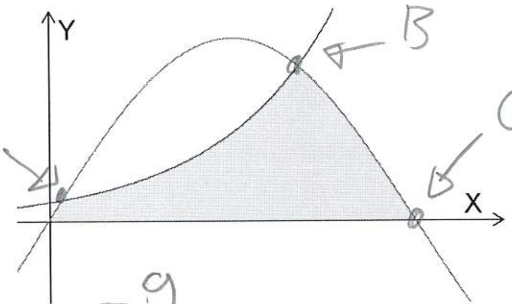
$f(x) = 0{,}2e^x$ och

$g(x) = 2\sin(x)$

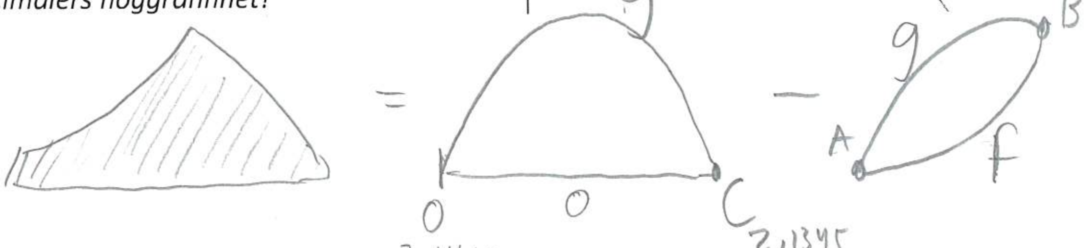
I figuren har ett område markerats.

Bestäm arean av området i figuren. (1/2/0)

Svara med tre decimalers noggrannhet!



Strategi:



Skärningspunkter:

$x(A) \approx 0{,}1121$

$x(B) \approx 2{,}1345$

$x(C) \approx 3{,}1416$ $(=\pi)$

$$\int_{0}^{3{,}1416}(g-0)\,dx - \int_{0{,}1121}^{2{,}1345}(g-f)\,dx \approx$$

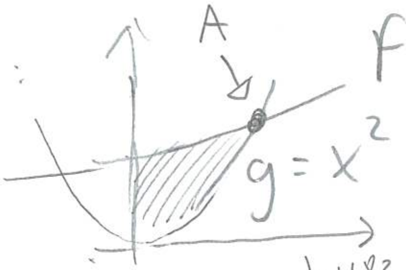
$$\approx \left[\text{IntegralMellan}(g, 0, 0, x(C)) - \text{IntegralMellan}(g, f, x(A), x(B))\right] \approx$$

$$\approx 4 - 1{,}5892 \approx 2{,}411 \text{ ae}$$

D5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (1/2/0)

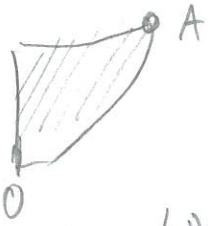
Kurvorna $y = e^{0,2x}$ och $y = x^2$ innesluter tillsammans med y-axeln ett område i första kvadranten. Teckna integralen för områdets area samt bestäm denna area med minst tre värdesiffror.

Ritas graferna först:



Skärningspunkt:

$x(A) \approx 1,1183$



$\approx \int_0^{1,1183} (f - g)\,dx \approx$

[integral mellan (f, g, 0, x(A))] $\approx$ 0,787 ae

D6. Figuren till höger visar graferna till

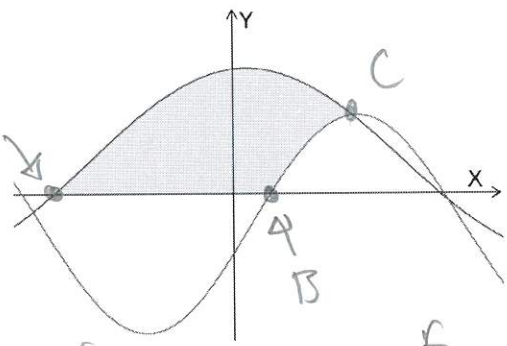
$f(x) = -3\cos(0,4x + 3) + 1$ och

$g(x) = -3,5\cos(0,6x - 5) - 1$

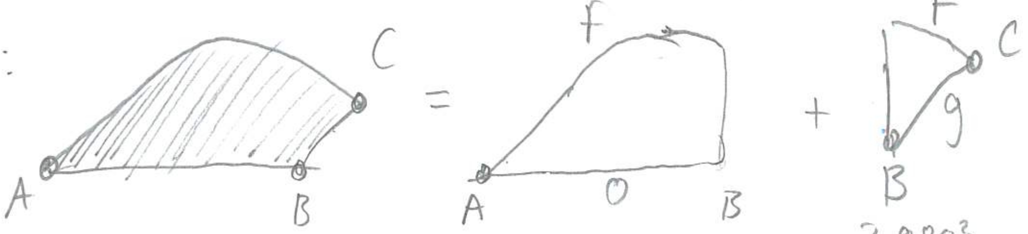
I figuren har ett område markerats.

Bestäm arean av området i figuren. (1/2/0)

Svara med tre decimalers noggrannhet!



Strategi:



Skärningspunkter:

$x(A) \approx -4,4226$

$x(B) \approx 0,9623$

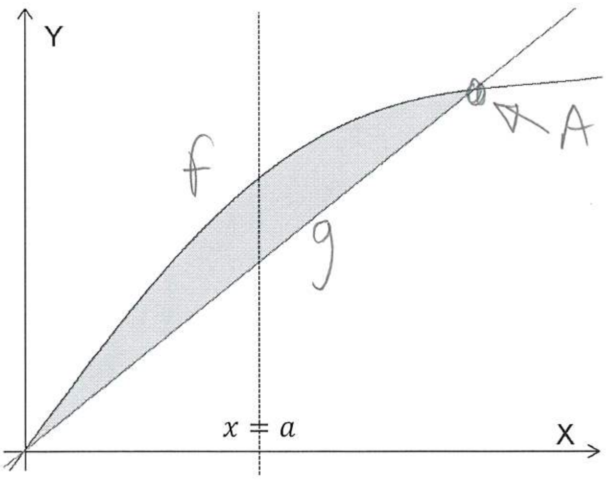
$x(C) \approx 2,9803$

$\int_{-4,4226}^{0,9623} (f - 0)\,dx + \int_{0,9623}^{2,9803} (f - g)\,dx \approx$

[integral mellan (f, 0, x(A), x(B)) + integral mellan (f, g, x(B), x(C))]

$14,2629 + 3,5559 \approx$ 17,819 ae

D7. Figuren nedan visar ett område i första kvadranten.
Området begränsas av graferna till $f(x) = \sin(0{,}8x) + 0{,}9x$ och $g(x) = x$.



Skärningspunkt:
$x(A) \approx 3{,}4824$

Bestäm det värde på a som gör att den vertikala linjen $x = a$ delar området i två lika stora delar.

Svara med 3 decimaler! (0/1/2)

Hela områdets area $\approx \int_0^{3{,}4824} (f-g)\,dx \approx \left[\begin{matrix}\text{IntegralMellan} \\ (f, g, 0, x(A))\end{matrix}\right]$

$\approx 1{,}8154$

Halva området blir då: $\frac{1{,}8154}{2} \approx 0{,}9077$

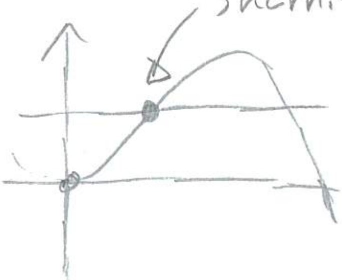
Vill lösa ekv: $\int_0^{a} (f-g)\,dx = 0{,}9077$

ex. via att vita ut prim. funk och skärning

$\int_0^{a} (\sin(0{,}8x) + 0{,}9x - x)\,dx = 0{,}9077$

Integral $(f-g) + \frac{5}{4}$

$y = 0{,}9077$



skärning $\Rightarrow (1{,}7787 ; 0{,}9077)$

$\Rightarrow$ $a \approx 1{,}779$