FACIT

5.3 Sannolikhetsfördelning

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Bestäm värdet av integralen nedan (1/0/0)

$$\int_1^3 0{,}48 \cdot e^{-0{,}48x}\,dx$$

Endast svar krävs!

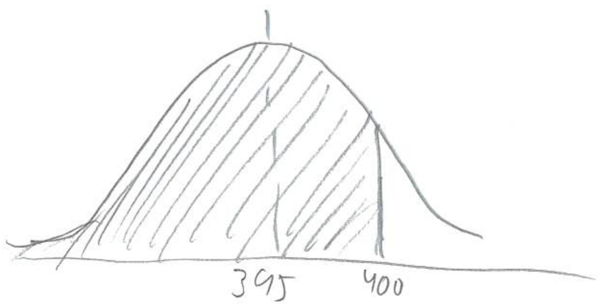
$f(x) = 0{,}48e^{-0{,}48x}$

Integral (f, 1, 3) $\approx$ 0,382

D2. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov i Ma 2c. Lös uppgiften. (2/0/0)

Ett företag fyller konservburkar med krossade tomater. Enligt märkningen innehåller en burk 400 g tomater. Tomaternas vikt är normalfördelad kring medelvärdet 395 g och standardavvikelsen är 5,0 g.

Hur många procent av konservburkarna kan förväntas innehålla mindre än de 400 g som anges på burken?



Medelvärde: 395 g

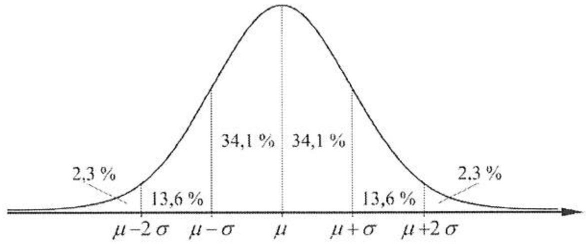
Standardavvikelse: 5 g

"Sannolikhet" – "Normalfördelning"

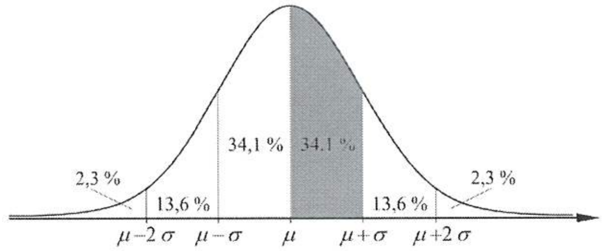
$\mu = 395$ $\sigma = 5$

] 400 $\Rightarrow$ 84,13 %

D3. I kursen Matematik 2c hanterades normalfördelning enligt formelbladets mall:



a) I normalfördelningskurvan nedan har ett specifikt intervall markerats.



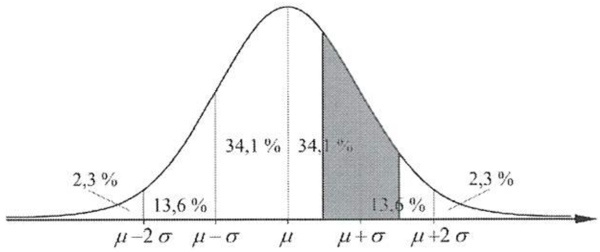
Visa att den angivna sannolikheten 34,1% stämmer genom att med det digitala verktyget beräkna motsvarande för valfri normalfördelningskurva. (1/0/0)

"Sannolikhet" - Normalfördelning

ex: $\mu = 1$ $\sigma = 1$ $\Rightarrow$ $0,3413... \approx 34,1\ \%$

[ ] $1 \leq x \leq 2$ vsv.

b) En Matte 2c-elev undrar vad som händer med procentsiffran om man istället räknar på *halva standardavvikelser*, och föreslår intervallet $\mu + 0,5\sigma \leq x \leq \mu + 1,5\sigma$



Eleven föreslår att svaret borde bli medelvärdet av de två intervallsiffrorna, dvs

$$\frac{34,1 + 13,6}{2} = 23,85\ \%$$

Undersök om eleven har rätt. (0/2/0)

Testa med kurven som används i a)

dvs $\mu = 1$ $\sigma = 1$

Då gäller att $1,5 \leq x \leq 2,5$ $\Rightarrow$ $0,2417$

$\approx 24,17\ \%$

Eleven har fel, men gör en bra uppskattning

D4. En matteelev får ska lösa följande matteuppgift:

Sannolikheten för att en mobiltelefon har gått sönder x år efter inköpet beskrivs av täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$$

Hur stor är sannolikheten att mobiltelefonen går sönder under de första två årens användande?

Elevens lösning presenteras nedan:

Sannolikheten ges av

$f(2) = \frac{1}{4}e^{-2/4} \approx 0,1563$

Svar: 15,6%

a) Elevens lösning är tyvärr fel. Vad är det som blivit fel i lösningen? (1/0/0)

Eleven missar att sannolikheter inte ges av funktionsvärden hos täthetsfunktionen utan av integralen av täthetsfunktionen

b) Bestäm det rätta svaret på elevens uppgift. (0/1/0)

"Första 2 åren" $\Rightarrow \int_0^2$

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\int_0^2 f\,dx = \left[\begin{matrix}\text{Integral} \\ (f, 0, 2)\end{matrix}\right] \approx 0,393$$

$\Rightarrow$ 39,3 %

D5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Som ett led i ett bageris kvalitetskontroll vägs ett antal bakade kanelsnäckor. Kvalitetskontrollen visar att vikten är normalfördelad med medelvikten 120 gram och standardavvikelsen 4,0 gram.

Hur många kanelsnäckor kan förväntas väga mellan 115 gram och 130 gram om man en dag bakar 450 kanelsnäckor? (0/2/0)

1) "Sannolikhet" → Normalfördelning: $\mu = 120$, $\sigma = 4$

$\Rightarrow$ 88,8 %

2) Antal bullar = 88,8 % av 450 ≈ 400 st

D6. Sannolikheten för att en nyfödd har en viss födelsevikt, x kg, beskrivs enligt Harald Rigkoll enligt täthetsfunktionen

$f(x) = 0{,}28 \cdot e^{-0{,}28 \cdot x}$

a) Använd Haralds modell för att bestämma sannolikheten för att ett barn har födelsevikt mellan 2,5 och 3,5 kg. (2/0/0)

$$\int_{2,5}^{3,5} 0{,}28e^{-0{,}28x}\,dx = \left[\text{integral}\right] \approx 0{,}121$$

$\Rightarrow$ 12,1 %

b) Undersök hur väl Haralds modell verkar stämma med verkligheten (0/2/0)

Haralds modell är en exp. fördelning. Den antyder att det finns en viss sannolikhet att barnen väger helt orimliga värden. ex: "sannolikheten att ett barn väger mellan 10 och 15 kg" ≈ 4,6 %

Mer rimligt vore helt klart en normalfördelning

Haralds modell stämmer inte alls med verkligheten

D7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6}e^{-t/6}$, $t \geq 0$

a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)

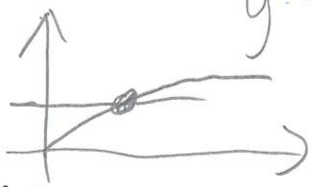
b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: "Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter."
Bestäm värdet på x. (0/2/0)

a) "Högst 10 min" $\Rightarrow \int_0^{10} \frac{1}{6} e^{-t/6} dt = [\text{Integral}] \approx 81{,}1\%$

b) Vill lösa ekv: $\int_0^{x} \frac{1}{6} e^{-t/6} dt = 0{,}5$ "Integral(f) + 1"

$y = 0{,}5$

T.ex via skärning:



$x \approx 4{,}16$ min.

D8. Sannolikheten att en viss lågenergilampa är trasig efter x år är exponentialfördelad med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{3{,}4} e^{-\frac{x}{3{,}4}}$$

a) Hur många år dröjer det tills 40 % av de tillverkade lamporna har gått sönder? (0/2/0)

Vill lösa ekv: $\int_0^{x} f(t)\,dt = 0{,}4$

(se D7b el. teorifilen för detaljer) $\Rightarrow x \approx 1{,}74$ år

b) Hos familjen Lampo köptes 4 sådana lampor och efter två år hade ingen gått sönder.
Hur stor är sannolikheten för det? (0/1/1)

Sannolikheten för en hel lampa $= 1 - \int_0^{2} f(x)\,dx$

$\approx 0{,}5553$

För fyra lampor: $0{,}5553^4 \approx 9{,}51\%$

D9. För att beskriva sannolikheten för att få en pizza på en viss pizzeria inom tiden x minuter räknat från beställningen används varken normalfördelning eller exponentiell fördelning.
Istället används täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot e^{-0,2x}}{3750}$$

a) Bestäm sannolikheten att få en pizza mellan 10 och 20 minuter (0/1/0)

$$\int_{10}^{20} f\,dx = \left[\begin{matrix}\text{Integral}\\(f,10,20)\end{matrix}\right] \approx 0,4237 \Rightarrow 42,4\,\%$$

b) Pizzerian säger följande på sin hemsida:

- *"Oavsett försäljningstryck kommer 90 % av kunderna att få sin pizza inom t minuter!"*

Bestäm värdet på t (0/2/0)
Svara med en decimals noggrannhet!

Vill lösa ekv: $\int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0,9$

(se uppgift D7b el. teorifilen för detaljer) $\Rightarrow x \approx 33,4$ minuter

c) Visa att funktionen $f(x)$ ovan är en giltig täthetsfunktion i detta fall. (0/1/1)

En täthetsfunktion ska täcka 100 % om man integrerar hela dess definitionsmängd.
I detta fall är Def. mängden $x \geq 0$
(då x är en tid)

Integral$(f, 0, \infty) = 1$ v.s.v.

(Det går inte skriva ∞, men skriv ett stort tal

D10. För en viss slags täthetsfunktion gäller följande:

$f(x) = a \cdot x \cdot e^{-0.2x^2}$

$x \geq 0$

Bestäm värdet av konstanten a (0/0/2)

Om det är en täthetsfunktion ska den totala sannolikheten bli 100 %, dvs integralen i hela definitionsmängden ska ge svaret 1.

Def. mängden är $x \geq 0$

"Om $a = 1$" $\Rightarrow \int_0^\infty f\,dx = 2{,}5$

dvs 2,5 ggr för stor

a behöver således vara

$a = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$