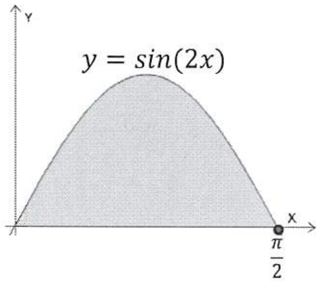
FACIT

5.4 Rotationsvolymer

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Till höger visas ett område vars area kan beskrivas med integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx$$

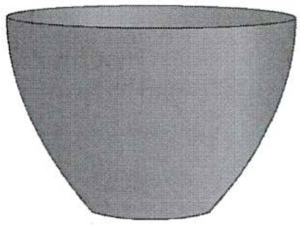


Beräkna volymen som fås då området roteras kring x-axeln. (2/0/0)
Svara med 2 decimaler!

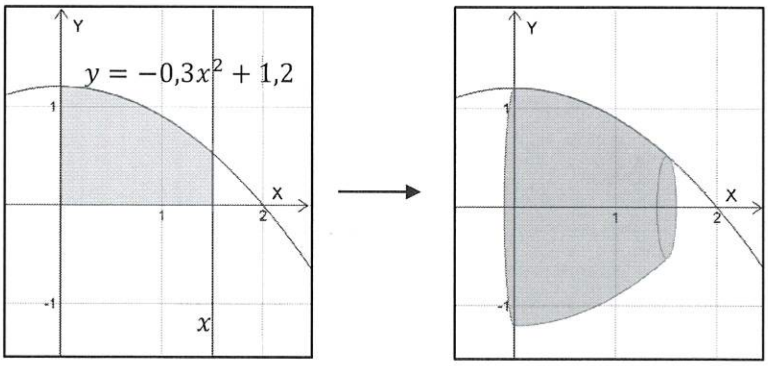
Rotation kring x-axeln: $V = \int \pi \cdot f^2\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} \pi \cdot f^2\,dx \approx [\text{Integral}(pi \cdot f^2, 0, pi/2)] \approx 2{,}47$$

D2. En krukmakare har bestämt sig för att göra en kruka i form av en rotationskropp.



Krukans insida formas av att det område som innesluts av grafen till $y = -0{,}3x^2 + 1{,}2$, de positiva koordinataxlarna, samt linjen $x = 1{,}5$, roteras runt x-axeln.



Utgå från att sträckorna i koordinatsystemet anges i dm.
Hur många liter kommer den färdiga krukan rymma? (2/0/0)
Svara med 2 decimaler

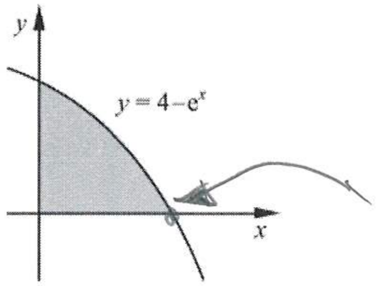
Rotation kring x-axeln: $V = \int \pi \cdot f^2\,dx$

$$\int_0^{1,5} \pi \cdot f^2\,dx \approx [\text{Integral}(pi \cdot f^2, 0, 1.5)] \approx 4{,}67$$

$4{,}67\ dm^3 = 4{,}67\ l$

D3. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften (0/2/0)

I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



Börja med att bestämma skärningspunkten

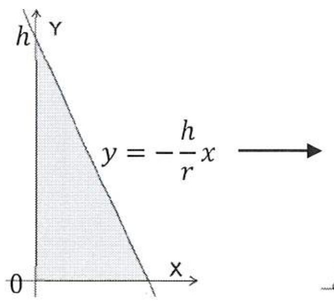
Skärning ⇒ $x \approx 1{,}3863$

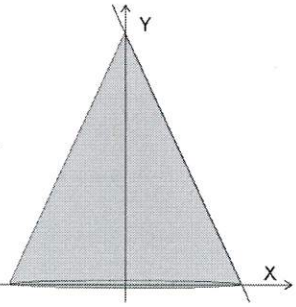
När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror.

Volymen ges av

$$\int_0^{1,3863} \pi(4-e^x)^2 dx = \left[\begin{matrix}\text{Integral} \\ (\text{pi}\cdot f^2, 0, x(A))\end{matrix}\right] \approx 17{,}847 \text{ ve}$$

D4. Visa att volymen av en kon med radie r och höjden h kan fås när området som begränsas av y-axeln, x-axeln samt den räta linjen $y = -\frac{h}{r}x$ roterar kring *y-axeln* (1/2/0)



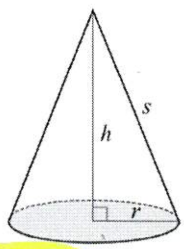


Kon

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Mantelarea

$A = \pi r s$



Rotation kring y-axeln ⇒ $\int_{\text{Nedre } y}^{\text{övre } y} \pi \cdot x^2 \, dy$

Nedre $y = 0$

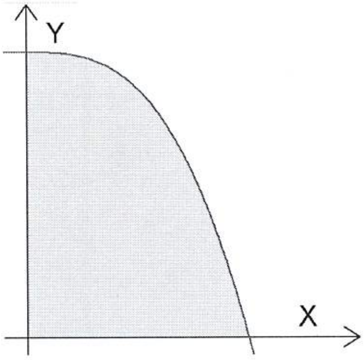
övre $y = h$

Om $y = -\frac{h}{r}x$ är $x^2 = \left(\frac{yr}{h}\right)^2 = \frac{r^2y^2}{h^2}$

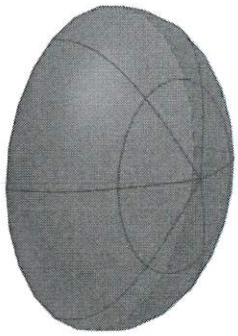
$$V = \int_0^h \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} y^2 dy = \left[\begin{matrix}\text{Prim.} \\ \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{y^3}{3}\end{matrix}\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} - 0 =$$

$$\left[\begin{matrix}\text{Förkorta} \\ \text{bort } h^2\end{matrix}\right] = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \text{ vsv.}$$

D5. Figuren visar det område som begränsas av koordinataxlarna samt grafen till funktionen $y = -0{,}2x^3 + 4$

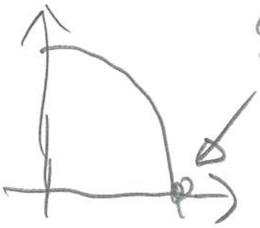


a) När området roterar kring x-axeln fås rotationskroppen till höger.



Bestäm dess volym. (0/2/0)

Svara med 3 decimaler.

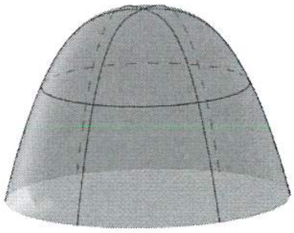


Skärning $\Rightarrow x \approx 2{,}7144$

Rot. kring x-axeln: $\int \pi f^2 dx$

$V = \int_0^{2{,}7144} \pi f^2 dx = [\text{Integral}(\text{pi} \cdot f^2, 0, x(A))] \approx 87{,}712$ ve

b) När området roterar kring y-axeln fås rotationskroppen till höger.



Bestäm dess volym. (0/3/0)

Svara med 3 decimaler.

Rot kring y-axeln: $\int_{\text{Nedre } y}^{\text{Högsta } y} \pi x^2 dy$

Nedre $y=0$

Högsta $y=4$

Om $y = -0{,}2x^3 + 4$ är $x = \sqrt[3]{\frac{y-4}{-0{,}2}} = \sqrt[3]{20-5y}$

$\int_0^4 \pi \left(\sqrt[3]{20-5y}\right)^2 dy = [\text{Integral}(\text{pi} \cdot (20-5y)^{2/3}, 0, 4)] \approx 55{,}554$ ve

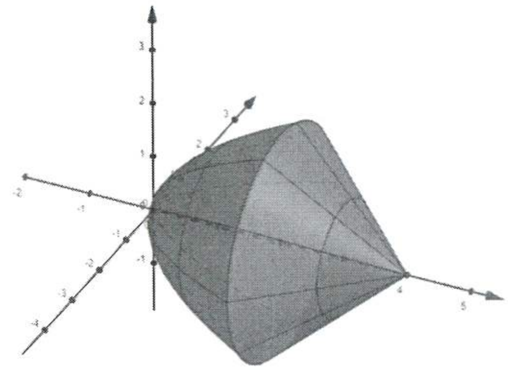
D6. Figuren visar den rotationskropp som fås då det område som begränsas av

x-axeln,

$y = \sqrt{2x}$ = f

$y = 4 - x$ = g

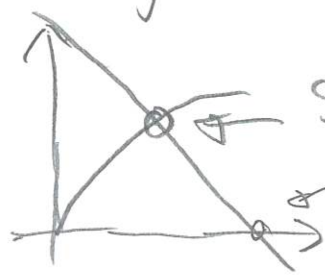
roterar kring x-axeln



Bestäm rotationskroppens volym. (0/3/0)

Svara med 3 decimaler

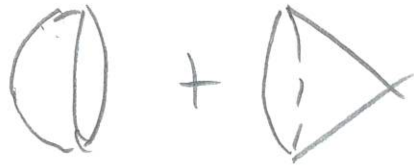
Ritas graferna fås:



Skärning ⇒ $x = 2$

Skärning ⇒ $x = 4$

Volymen delas upp i 2 delar:

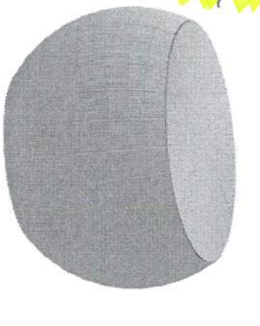


$$V = \int_0^2 \pi f^2 \, dx + \int_2^4 \pi g^2 \, dx \approx \left[\text{Integral}\right] \approx 12{,}5664 + 8{,}3776$$

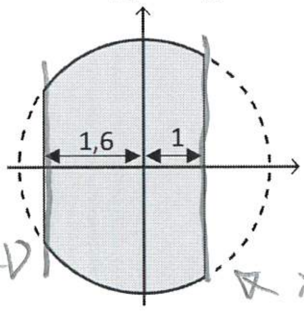
kan också fås via konformel

$\approx$ 20,944 ve

D7. Figuren visar en rotationskropp som utgös av en del av ett klot med radien 2 dm.



Klotet är klippt enligt måtten nedan.



OBS $x = -1{,}6$

$x = 1$

Bestäm rotationskroppens volym. (0/1/1)

Svara med 3 decimaler

Ett klot är resultatet av en halvcirkel som roterat kring t.ex x-axeln

mitt punkt i origo med radien 2

Cirkelns ekv: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

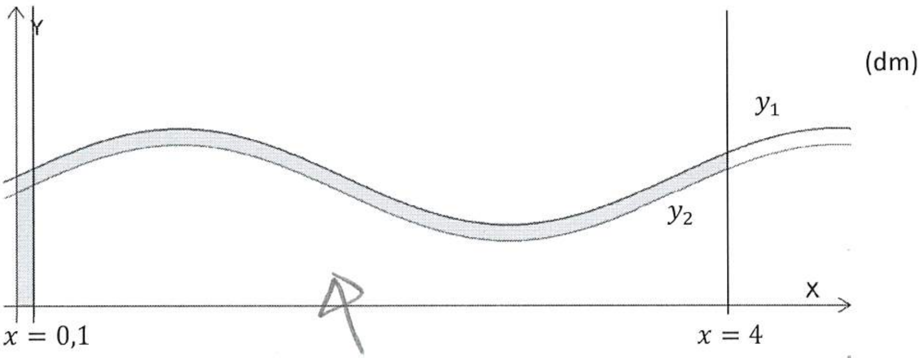
$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\int_{-1,6}^{1} \pi \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx = \left[\text{Integral}\right] \approx 27{,}336 \text{ ve}$$

(Hela klotet skulle varit 33,51)

D8. En skulptör har designat en 4 dm hög blomvas i form av en rotationskropp.

Som utgångspunkt används området nedan, som begränsas av:
y-axeln,
linjen $x = 0{,}1$,
grafen till $y_1 = 0{,}3\sin(1{,}7x) + 0{,}8$, $= f$
grafen till $y_2 = 0{,}3\sin(1{,}7x) + 0{,}7$, $= g$
och linjen $x = 4$



OBS! Vasens insida = tomt

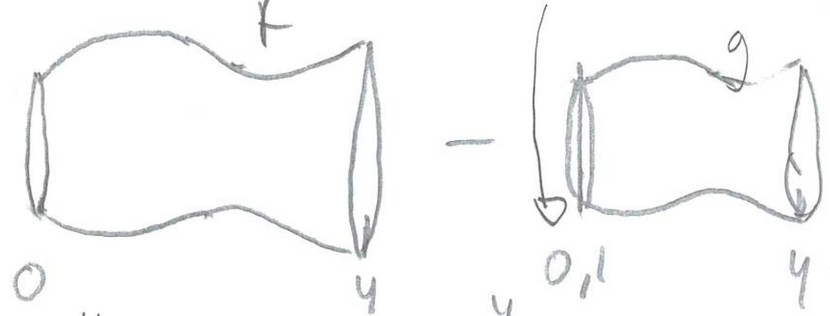
OBS insidan börjar på 0,1 pga bottnen

Vasen fås då området roteras runt x-axeln.

Hur mycket glasmassa går åt till att bygga vasen?
Svara med 2 decimaler

(0/2/1)

Vasen ges av



$$\begin{bmatrix}\text{Rot kring}\\ x\text{-axeln}\end{bmatrix} = \int_0^4 \pi \cdot f^2\,dx - \int_{0,1}^4 \pi \cdot g^2\,dx \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix}\text{Integral}\end{bmatrix} \approx 8{,}688 - 6{,}623 \approx 2{,}065$$

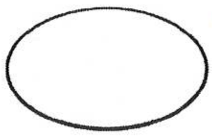
$$\approx 2{,}07\,\text{dm}^3$$

D9. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften

Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i origo och med radien 1 är
$x^2 + y^2 = 1$

Ekvationen för en ellips med medelpunkt i origo och som skär axlarna i $(\pm a, 0)$ och $(0, \pm b)$ är på motsvarande sätt

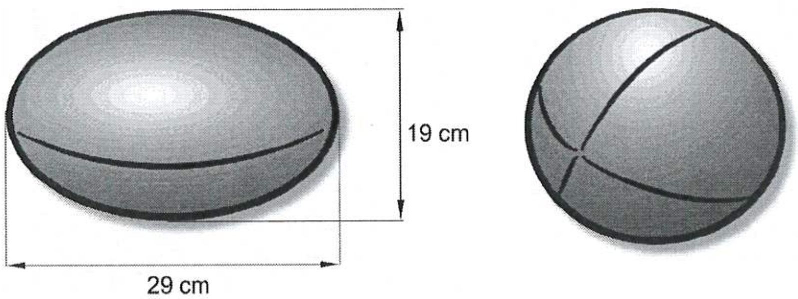
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Ellips

När en sådan ellips roterar runt x-axeln får man en ellipsoid.
I rugby används en boll som har formen av en ellipsoid.

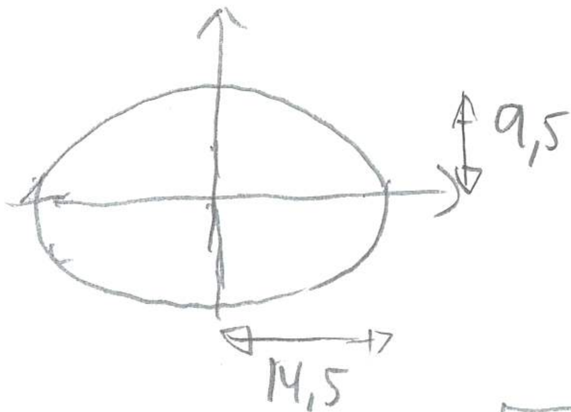
En typ av boll som är godkänd för rugbymatcher har de mått som anges i figuren nedan.



Bestäm volymen av denna boll. (0/0/3)

Sätt in i ett koord system med origo i mitten

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $a = 14{,}5$
$b = 9{,}5$

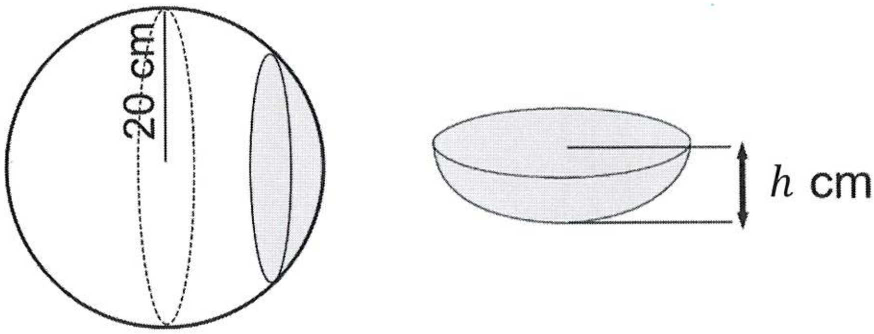
$\Rightarrow$ ekv. blir

$$\left(\frac{x}{14{,}5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9{,}5}\right)^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{14{,}5}\right)^2} \cdot 9{,}5$$

Rot kring x-axeln $\Rightarrow \displaystyle\int_{-14{,}5}^{14{,}5} \pi \cdot y^2 \, dx = [\text{Integral}]$

$\approx 5481 \text{ cm}^3 \approx 5{,}5 \text{ l}$

D10. Nedanstående figur visar ett skålformat segment av ett klot med radien 20 cm.

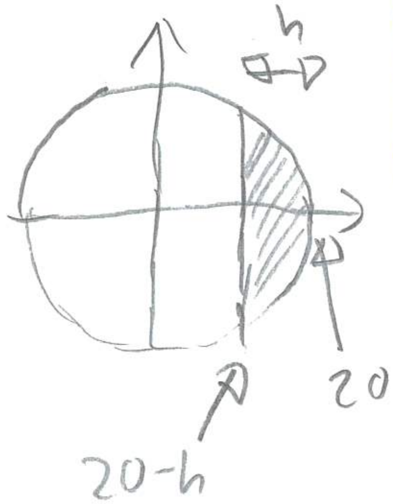


Visa med hjälp av att rotera delar av grafen av en halvcirkel kring x-axeln att volymen av klotsegmentet med höjden h ges av (0/1/3)

$$V = \pi\left(400h + \frac{(20-h)^3}{3} - \frac{20^3}{3}\right)$$

Börja med en halvcirkel med mittpunkt i origo och radie $= 20 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20^2$.

Lös ut $y^2 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2$



Gränserna blir

$(20-h)$ och 20 $\longrightarrow$

$$V = \int_{20-h}^{20} \pi \cdot y^2\,dx = \int_{20-h}^{20} \pi(400 - x^2)\,dx =$$

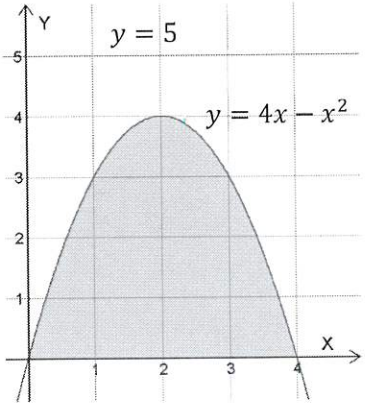
$$= \left[\begin{array}{c}\text{Primitiv:}\\ \pi\left(400x - \frac{x^3}{3}\right)\end{array}\right]_{20-h}^{20} = \underbrace{\left(\pi \cdot \left(400 \cdot 20 - \frac{20^3}{3}\right)\right)}_{\text{Övre}} - \underbrace{\left(\pi\left(400(20-h) - \frac{(20-h)^3}{3}\right)\right)}_{\text{Nedre}}$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut}\\ \pi\\ \text{framför ( )}\end{array}\right] = \pi\left(400 \cdot 20 - \frac{20^3}{3} - 400 \cdot 20 + 400 \cdot h + \frac{(20-h)^3}{3}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Förkorta}\\ \text{bort } 400 \cdot 20\end{array}\right] = \pi\left(400 \cdot h + \frac{(20-h)^3}{3} - \frac{20^3}{3}\right) \quad \text{VSV.}$$

D11. Figuren till höger visar det område som begränsas av grafen till funktionen $y = 4x - x^2$ och x-axeln.

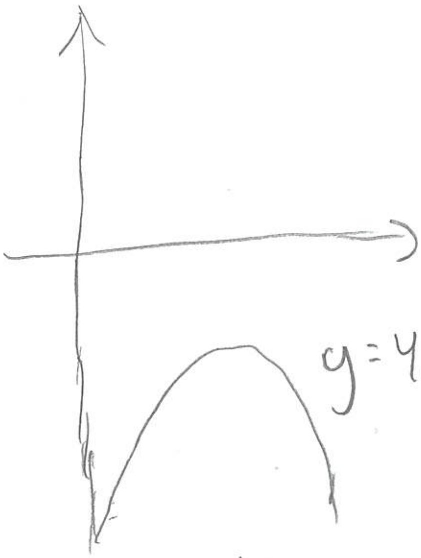
Bestäm volymen av den rotationskropp som fås då området roterar kring linjen $y = 5$ (0/1/2)



Rotationen kring $y=5$ av kurvan $y=4x-x^2$ kan likställas med rotationen av $4x-x^2-5$ runt x-axeln

(Allt flyttas ned 5 steg)

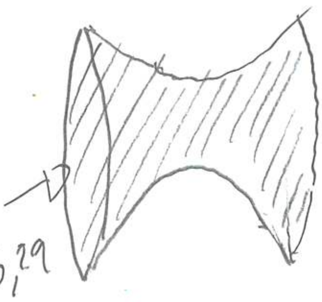
Flyttar ned kurvan 5 steg



Rot kring x-axeln ger:

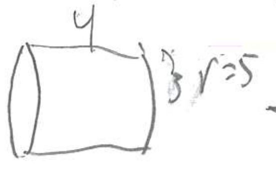
$$\int_0^4 \pi \cdot y^2\, dx = [\text{Integral}] \approx 86,29$$

Men! Detta är inte den sökta volymen, eftersom det som nu beräknats är



och det som söktes är det "motsatta":

Alltså: Ta hela cylindern minus 86,29

$V =$  $- 86,29 \approx 227,9$ ve