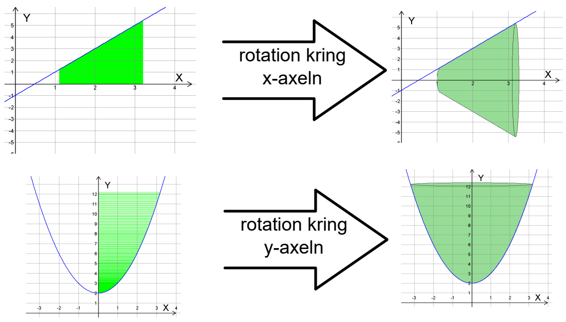
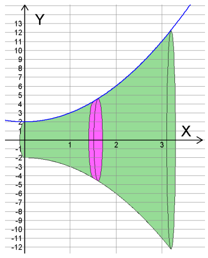
Rotationsvolymer

En rotationskropp orsakas av att en area i koordinatsystemet roteras kring en linje vilket skapar en (symmetrisk) 3D-volym.

Exempel:



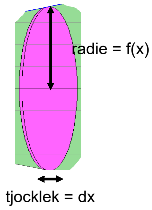
Volymen av en rotationskropp fås genom att summera cylindrar.



Strategi:

Ta fram volymen för en cylinder, dV

dV = $\pi \cdot$ radie$^2 \cdot$ tjocklek



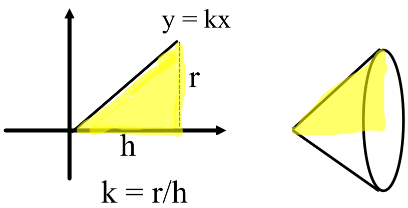
Summera alla cylindrar mha en integral

$$V = \int_a^b dV$$

Runt x-axeln: $$V = \int_{a_x}^{b_x} \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$$

Runt y-axeln: $$V = \int_{a_y}^{b_y} \pi \cdot x^2 \cdot dy$$

Det är via denna teknik som de Geometriska figurernas volymformler uppkommit, ex. volymen av en kon, som fås genom rotation av en rät linje kring t.ex. x-axeln:

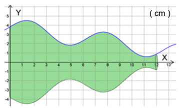


$$\int_0^h \pi f^2 dx = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2} dx$$

$$= \left[Primitiv{:}\ \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} - \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{3}$$ Volymen för en kon!

Exempel D1: Ett företag vill bygga vasen "ZINUZ", och tänker sig att den ska byggas i form av en rotationskropp.



Kurvan y = 3,8 - 0,2 x + sin (x) mellan x-värdena $x = 0$ och $x = 12$ roteras kring x-axeln.

Bestäm vasens tänkta volym.

Lösning: Skriv in funktionen i Geogebra

$f(x) = 3.8 - 0.2\,x + \sin(x)$

Områdets gränserna är redan givna, och vid en rotation kring x-axeln är det bara att genomföra beräkningen

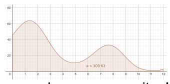
$$\int_0^{12} \pi f^2 dx \longrightarrow \text{Integral}\left(\text{pi} \cdot f^2, 0, 12\right)$$

$a = \text{Integral}\left(\pi\ f(x)^2, 0, 12\right)$

$\rightarrow$ 309.63

Volymen är ca 310 cm^3

OBS!!



Ignorera den area som ritas!!

Om man vill få en känsla för hur vasen ser ut kan man med fördel använda Geogebras 3D-läge.

Börja med att tala om vilken del av grafen som ska rotera, Detta görs lättast med kommandot

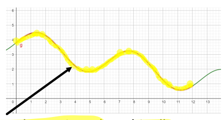
Funktion

Funktion(f, 0, 12)

$\rightarrow$ Om((0) ≤ x ≤ (12), 3.8 − 0.2 x + sin(x))

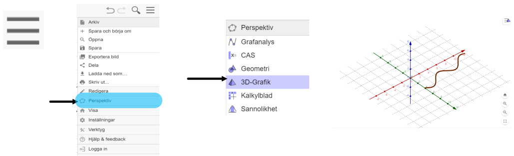
g(x) = Om(0 ≤ x ≤ 12, f(x))

$\rightarrow$ 3.8 − 0.2 x + sin(x), ((0) ≤ x ≤ (12))



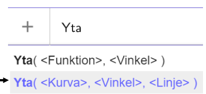
Detta skapar en ny funktion, som bara utgör den aktuella delen som ska roteras.

Nästa steg är att rotera.
Helt klart lättast är att bara åstadkomma själva rotationsytan, dvs en "tom" rotationskropp.
Byt till 3D-läge, genom att först trycka på de tre strecken uppe till höger, och sedan Perspektiv - 3D-Grafik:



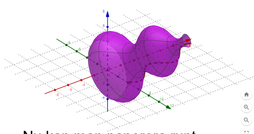
Nu ska rotationen genomföras.

Kommandot "Yta" är det lättaste att använda.

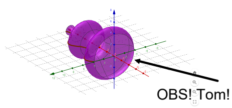


Yta(g, 2pi, xAxeln)

(Om man utelämnar xAxeln, blir det automatiskt x-axeln)



Nu kan man panorera runt och vrida genom att dra med musen



OBS! Tom!

Notera att detta INTE är en rotationskropp utan en rotationsyta, dvs den är tom

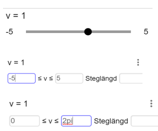
men det ger en tillräcklig bild av utseendet.

Vill man se själva rotationen gå till kan med fördel göra en glidare, som går från 0 till 2 π

Skriv ett namn t.ex. v

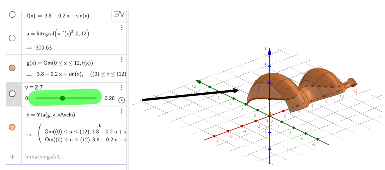
Tryck på en av gränserna, ex -5

Byt till 0 och 2pi



I kommandot "Yta", skriv "v" i stället för det tidigare "2pi", dvs

Yta(g, v, xAxeln)



Nu kan man "skapa" rotationsytan genom att dra i glidaren.

Exempel D2:

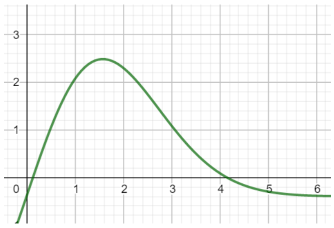
Det området som begränsas av funktionen
$y = 3xe^{-0,2x^2} - 0,4$ och x-axeln roterar kring x-axeln.
Då fås en rotationskropp.
Bestäm rotationskroppens volym.

Lösning:

Börja med att skapa en bild av området.

Skriv in funktionen

$f(x) = 3\,x\,e^{-0.2x^2} - 0.4$

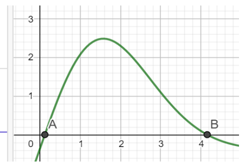


Använd Skärning
för att hitta gränserna.

A = Skärning(f, xAxeln, (0.1338, 0))
→ (0.1338, 0)

B = Skärning(f, xAxeln, (4.1454, 0))
→ (4.1454, 0)

Inmatningsfält...

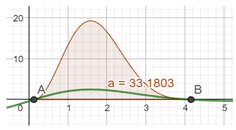


Nu är det färdigt för att
hitta volymen.

$$\int_{0,1338}^{4,1454} \pi f^2 dx \longrightarrow$$

Integral(pi · f^2, x(A), x(B))

→ 33.1803



OBS! Ignorera
den uritade arean!

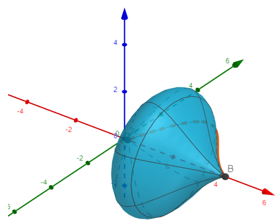
Volymen är 33,18 ve

Vill man, kan man göra sig en bild av rotationskroppen,
(se detaljer i exempel D1 - här skriver jag bara kommandona)

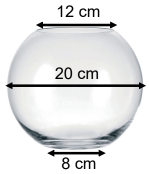
Funktion(f, x(A), x(B))

g(x) = Om(x(A) ≤ x ≤ x(B), f(x))
→ $3\,x\,e^{-0.2x^2} - 0.4$, ((0.1338) ≤ x ≤

Yta(g, 2pi, xAxeln)
→ (u, Om((0.1338) ≤ u ≤ (4.1454),



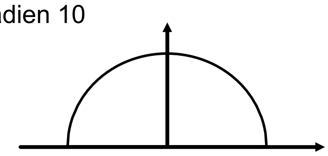
Exempel D3: Ett företag har designat en vas som ett klotsegment, med mått enligt bilden.



Bestäm volymen hos vasen.

Lösning: Här finns ingen given funktion, men ett klot fås genom rotation av en halvcirkel.

Därför är det naturligt att utgå från en halvcirkel i origo, med radien 10



Cirkelns ekvation (eller Pyth. sats) ger då

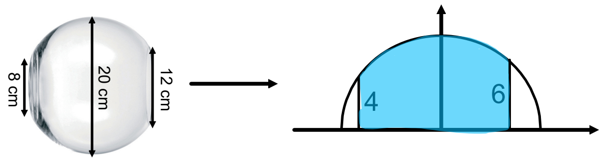
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$

Detta ger

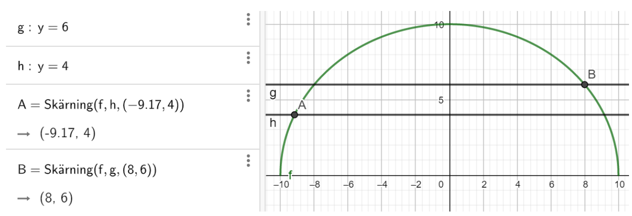
$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Lättast är att låta vasen rotera kring x-axeln.

Återstår bara att hitta rätt gränser.



Notera att vi bara har tillgång till y-värden, men lite problemlösning med Geogebra (t.ex. Skärning, eller lös) ger motsvarande x-värden



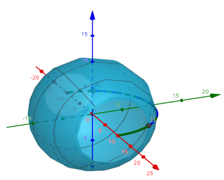
Nu är det standardläge igen - rotera kring x-axeln:

$$\int_{-9,17}^{8} \pi f^2 dx \longrightarrow$$

$a = \text{Integral}\left(\pi\ f(x)^2, x(A), x(B)\right)$

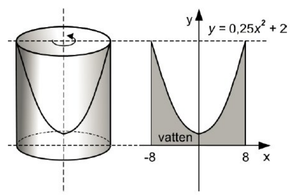
$\rightarrow$ 4050.22

Volymen är ca 4050 cm^3



Exempel D4: Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En cylindrisk glasbehållare med inre diametern 16 cm är från början helt fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant.
Vid en viss rotationshastighet står vattenytan i behållaren enligt figur 1. Sedd från sidan beskriver då vattenytan en parabel som ges av sambandet $y = 0{,}25x^2 + 2$ (Se figur 2)



Hur mycket vatten har vid denna tidpunkt runnit ur behållaren?

Lösning:

I denna uppgift handlar det om en rotation kring y-axeln

Det innebär att cylindrarna hamnar i y-led, och deras volym ges av

$dV = \pi x^2 dy$

Den sammanlagda volymen ges då av

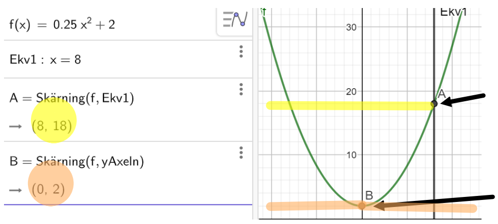
$$\int_{nedre\ y}^{högsta\ y} \pi x^2 dy$$

Steg 1 - Lös ut x^2 ur det givna sambandet $y = 0{,}25x^2 + 2$

$0{,}25x^2 = y - 2$

$x^2 = 4y - 8$

Steg 2 - Hitta det nedre och högsta y-värdet.



Högsta y-värdet. (18)

Nedre y-värdet. (2)

Steg 3 - Ställ upp och beräkna integralen

$$\int_{2}^{18} \pi(4y - 8)dy$$

a = Integral(π (4 y − 8), 2, 18)

→ 1608.5

Svar: **Det har runnit ut 1609 cm^3 = 1,6 liter**

Funktion(f, 0, 8)

d = Yta(g, 2 π, yAxeln)