FACIT

5.5 Problemlösning med integraler

Del 2 – Med digitalt hjälpmedel

D1. Funktionen $f(x) = 3x + 4{,}91x^2$ beskriver hastigheten på en sten som kastas rakt ner ifrån en hög bro ner i en älv.

f är hastigheten i m/s efter x sekunder i luften.

Bestäm $\int_0^2 f\,dx$ och tolka resultatet. (2/0/0)

Integral(f,0,2) $\Rightarrow$ 19,1

$\int$: m

f: m/s

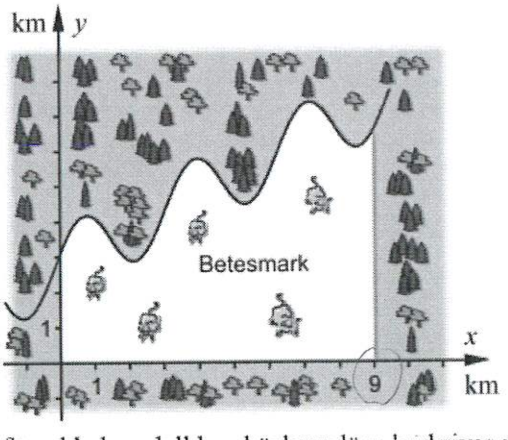
"per sekund försvinner"

$\Rightarrow$ $\int_0^2 f\,dx \approx 19{,}1$

"Under de 2 första sek. färdas stenen 19,1 m"

D2. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (2/0/0)

En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen $f(x) = 0{,}5x + \sin 2x + 3$

Beräkna betesmarkens area.

Arean ges av $\int_0^9 f\,dx$

Integral(f,0,9) $\Rightarrow$ 47,4

Arean är 47,4 km^2

D3. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (2/0/0)

En djurpopulation ökar med hastigheten $v(t) = 200 + 50t$ (djur/år) där t är tiden i år. Med hur många djur ökar populationen under de 10 första åren?

$\int$: djur

V : djur/år

"per år försvinner"

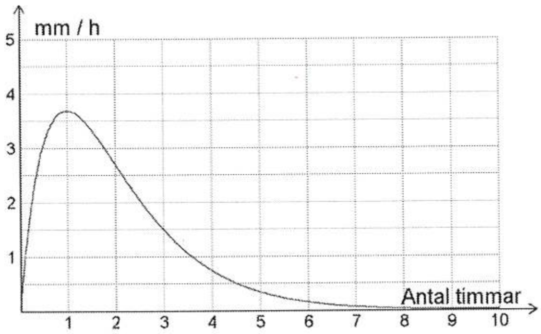
"De första 10 åren" ⇒ gränserna är 0 och 10

$$\int_0^{10} (200+50t)\,dt = [\text{Integral}] = 4500 \text{ st.}$$

D4. I den lilla orten BlötTräsk regnar det mycket. En dag gavs intensiteten hos regnet av

$f(x) = 10xe^{-x}$

där x är antalet timmar som gått sedan regnandet började.



a) Hur mycket regn hade kommit efter 7 timmar? (2/0/0)
Svara med 2 decimaler!

$\int$ mm

f : mm/h

"per timme försvinner"

$$\int_0^{7} 10xe^{-x}\,dx =$$

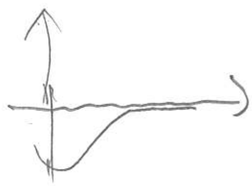
$$= [\text{Integral}] \approx 9{,}93 \text{ mm}$$

b) Efter hur många timmar hade det regnat 7 mm? (0/2/0)
Svara med 2 decimaler!

Vill lösa ekv: "$\int_0^{x} f(t)\,dt = 7$"

Kan lösas på många sätt ex via prim. funktion och skärning.

Integral(f) ⇒



Flytta upp till origo

Skärning med $y=7$: ⇒ $x \approx 2{,}44$ h

D5. Uppgiften nedan är ifrån ett nationellt prov. Lös uppgiften. (0/3/0)

En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande funktion ställas upp: $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$

där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

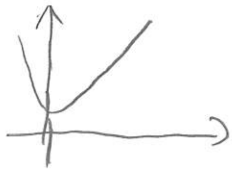
Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m.

$\int$: m

v : m/s } "per sekund försvinner"

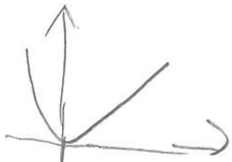
Vill lösa ekv: $\int_0^x v \, dt = 8$

1) Primitiv: Integral(v) $\Rightarrow g(x)$

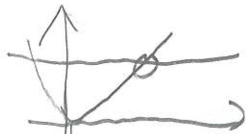


2) Flytta till origo: $-\frac{2}{5}$

$(h = g - g(0))$



3) Rita in $y = 8$



4) Skärning $\Rightarrow x \approx 4{,}2$ s

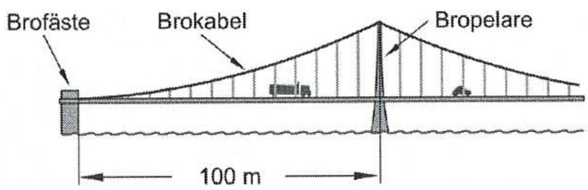
D6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Enligt en förenklad modell kan formen av brokabeln i figuren nedan beskrivas med funktionen

$f(x) = 0{,}040x^{3/2}$ i intervallet $0 \le x \le 100$, där

f är höjden över vägbanan i meter och

x är avståndet i meter längs vägbanan mätt från brofästet.



Faktaruta:

Längden s av en kurva $y = f(x)$ i intervallet $a \le x \le b$ ges av sambandet

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Bestäm längden av brokabeln mellan brofästet och bropelaren.

1) Skriv in funktionen: $f = 0{,}040 \cdot x^{3/2}$

2) Ta fram f' med kommandot "Derivera(f)" (eller genom att skriva f') $f' = \frac{3\sqrt{x}}{50}$

3) Längden ges av $\int_0^{100} \sqrt{1 + (f')^2}\, dx =$

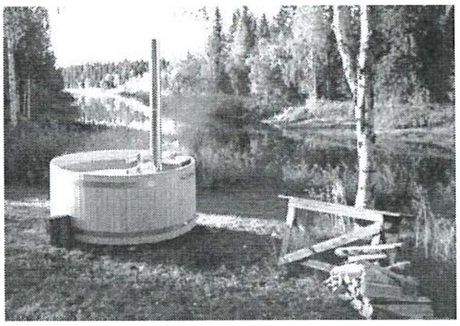
[Integral(sqrt(1+(f')^2), 0.0001, 100)] $\approx$ 108,5 m

Blir odefinerad för 0

D7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/3/0)

En badtunna innehåller 3000 liter vatten. En läcka gör att vatten rinner ut med hastigheten y liter/min. Det gäller att $y = 22e^{-0,011t}$, där t är tiden i minuter efter läckans uppkomst.

Efter hur lång tid är det 2000 liter kvar i badtunnan?



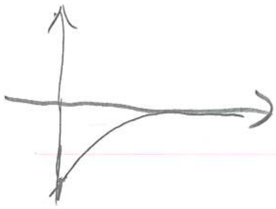
© Norrlandspoolen. Bilden är hämtad från företagets hemsida.

$\int$ liter

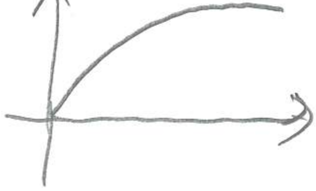
y: liter/min } "per minut försvinner"

Om det ska återstå 2000 liter är det samma som att 1000 liter runnit ut $\Rightarrow$ $\int_0^x 22e^{-0,011t}\,dt = 1000$

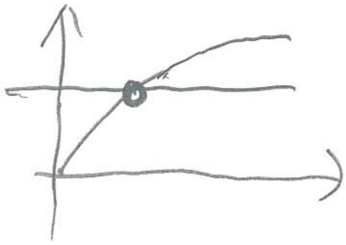
1. Primitiv: Integral(y)
(g)



2. Flytta upp till origo: +2200
(g(0)=-2200)

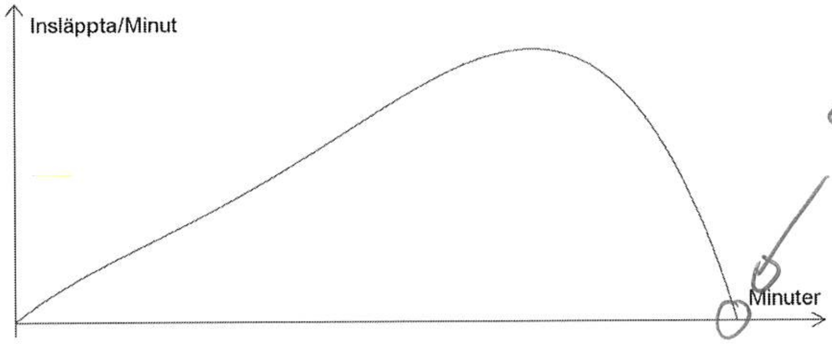


3. Skärning med y=1000
$\Rightarrow$ (63,01; 1000)



Efter ca 63 minuter

D8. Inför en hockeymatch kom publiken in i arenan en stund innan matchen började. Grafen nedan visar hur den takt som publiken släpptes in med varierade med tiden.



Skärning ⇒ $x \approx 29{,}1592$

Takten kan beskrivas med funktionen
$f(x) = -0{,}003x^4 + 0{,}11x^3 - 1{,}13x^2 + 13{,}8x$ insläppta/minut
där x är antalet minuter som gått sedan insläppet började.

Efter hur lång tid har hälften av publiken släppts in? (0/3/0)

$\int$ insläppta ⟸ "per minut försvinner"
f: insläppta/minut

Hela publiken ges av $\int_0^{29{,}1592} f\,dx \approx 3760{,}8$

Halva publiken $= \frac{3760{,}8}{2} \approx 1880$ st

Vill lösa ekv: $\int_0^x f(t)\,dt = 1880$

1) Integral(f) ⇒

Startar redan i origo

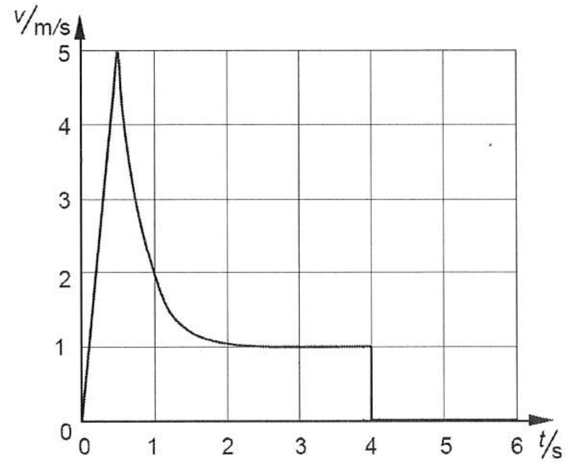
2) Skärning med $y = 1880$

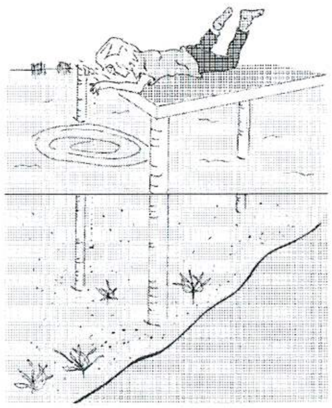
$x \approx 18{,}42$ minuter

Efter ca 18,4 minuter

D9. Uppgiften nedan är en lite modifierad uppgift ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En stenkula släpps en bit ovanför en vattenyta. Grafen nedan visar hur stenens hastighet v m/s varierar med tiden t sekunder från det ögonblick då den släpps.





Stenkulans hastighet $v(t)$ m/s i vattnet kan beskrivas med funktionen $v(t) = 1 + 18e^{-3t}$

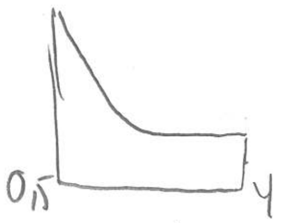
Bestäm den totala sträcka stenkulan rör sig från det att den lämnar handen tills det att den nuddar bottnen. (0/1/1)

Integralen av "m/s" ger "m" $\Rightarrow$

Totala sträckan är integralen från 0 till 4,

MEN: den består av två delar:

I luften innan vattnet



I vattnet

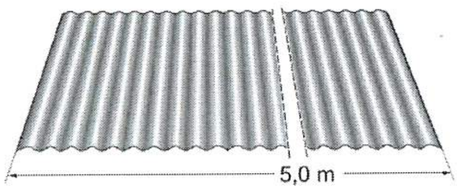
$$= \frac{b \cdot h}{2} + \int_{0,5}^{4} v \, dt$$

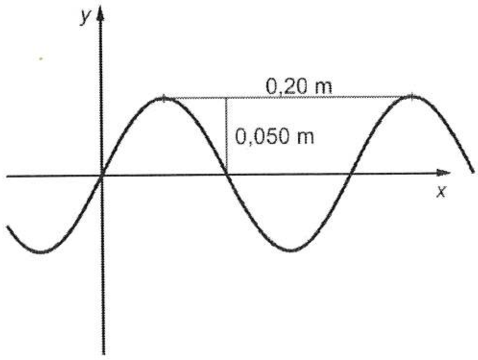
$$= \frac{0,5 \cdot 5}{2} + \text{Integral}(1 + 18e^{-3x}, 0,5, 4) \approx$$

$$1,25 + 4,84 \approx 6,09 \text{ m}$$

D10. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.

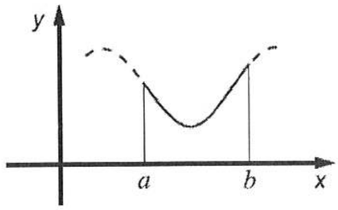




a) Bestäm en formel för ”plåtkurvan” på formen $f(x) = A\sin kx$ (0/1)

Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden s av en kurva $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



b) Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 5,0 m? (0/3/¤)

a) Kap. 2-kunskaper $\Rightarrow$ $A = 0{,}05$

$P = 0{,}20 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{0{,}20} = \frac{\pi}{0{,}1} = 10\pi$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}05 \cdot \sin(10\pi \cdot x)$

b) Vill bestämma värdet av integralen

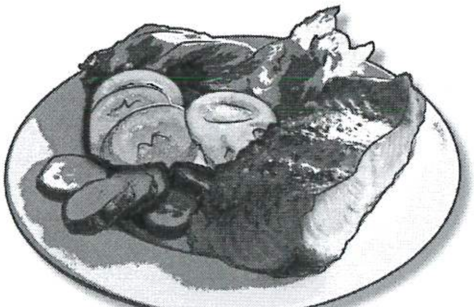
$$\int_0^5 \sqrt{1 + (f')^2}\,dx = \left[f' = \text{Derivera}(f) = \frac{\pi}{2}\cos(10\pi x)\right]$$

$$= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\cos(10\pi x)\right)^2}\,dx = \left[\text{Integral}(\text{sqrt}(1+(f')^2), 0, 5)\right]$$

$\approx$ 7,32 meter

D11. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/0/3)

Bakterien *Clostridium perfringens* kan orsaka allvarlig matförgiftning. Om mat som innehåller denna bakterie får svalna i rumstemperatur ökar antalet bakterier. Därför bör man alltid snabbt kyla ner maten efter tillagning. Det krävs ungefär 100 000 bakterier per gram mat för att en person ska bli matförgiftad.



Anta att det finns 100 bakterier per gram i en bit kokt lax efter tillagningen. Den kokta laxen får svalna i rumstemperatur. Bakteriernas antal ökar med hastigheten $5{,}73e^{0{,}0573 \cdot t}$ bakterier per gram per minut vid tidpunkten t minuter.

Hur lång tid tar det innan det finns så många bakterier per gram i laxen att en person som äter av den riskerar att bli matförgiftad?

$\int$: bakterier/g

f: bakterier/g·min

"per minut försvinner"

Vill lösa ekv: "Totala antalet/g = 100 000"

$$100 + \int_0^x f\,dt = 100\,000$$

Antalet från början

Antalet som läggs till

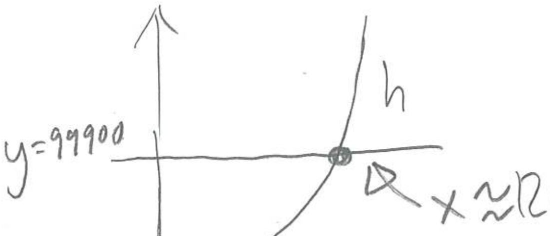
Antalet som ger matförgiftning

$$\Rightarrow \int_0^x f\,dt = 99900:$$

1) Primitiv: Integral(f)
$(g = 100e^{0{,}0573x})$

2) Flytta till origo: -100
$(h = g - g(0))$

3) Skärning med $y = 99900$



$x \approx 120{,}55$

Det tar ca 120 min