Problemlösning med integraler

Betydelsen av en integral svarar alltid mot att en annan funktion förändras på något sätt. Integralen summerar de förändringarna.

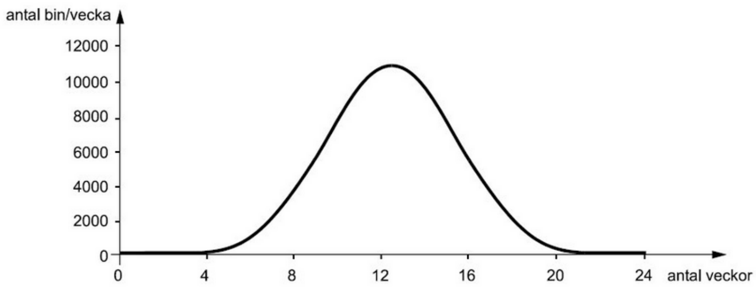
Den förändrade funktionens enhet fås genom att gångra ihop x och y-enheterna hos förändringsfunktionen.

Skillnad i funktionsvärden	=	Summan av alla förändringar	=	Integralen av förändringarna
f(3) - f(1)	=		=	$\int_1^3 f'(x)\,dx$

Exempel 1:

Den hastighet som antalet bin i ett bisamhälle ökar med per vecka framgår av figuren. Arean under grafen kan beräknas med en integral.

Tolka innebörden av integralens värde. (0/2)



Lösning: Integralens enhet ges genom att multiplicera ihop enheterna hos x och y-axlarna hos funktionen som ska integreras.

bin / vecka · antalet veckor = antalet bin

$\int$ bin

f bin/vecka

"per vecka" försvinner

Gränserna anger tider.

Integralen anger hur många bin som har tillkommit under dessa veckor.

Exempel D1: Funktionen $f(t) = 5e^{-0,5t} + t^2$ beskriver hastigheten i m/s hos ett föremål under en tid på t s

a) Beräkna $\int_2^8 f(t)dt$

b) Vad innebär svaret i a)-uppgiften?

Lösning: a) Att bestämma värdet av en integral görs med kommandot

Integral (Funktion , Från, Till)

Skriv in funktionen (med x som variabel)

$$f(x) = 5\,e^{-0.5x} + x^2$$

$$\int_2^8 f(t)dt \longrightarrow \begin{array}{l} a = \text{Integral}(f, 2, 8) \\ \rightarrow\ 171.5 \end{array}$$

Integralens värde är 171,5

b) Eftersom funktionen som integreras är m/s gäller:

$$\begin{array}{ccc} \int & & m \\ & & \\ f & & m/s \end{array}$$

"per sekund" försvinner

Integralens värde ska således tolkas som antalet meter.

Gränserna 2 och 8 motsvarar tider.

"Integralen innebär att mellan sekund 2 och 8 efter att ha föremålet börjat röra sig rör sig föremålet 171,5 meter"

Exempel D2: Uppgiften är ifrån ett gammalt nationellt prov

En från början tom vattenbehållare fylls på med hastigheten $8e^{-0,2t}$ liter/minut, där t är tiden i minuter efter det att den tomma behållaren börjat fyllas. En läcka gör att vatten samtidigt rinner ut med hastigheten $5e^{-0,1t}$ liter/minut.

Hur lång tid tar det innan behållaren åter är tom?

Lösning:

Eftersom de givna funktionerna har enheterna

liter / minut

kommer integralen i detta fall att ge enheten liter.

$$\int f \qquad \frac{\text{minut}}{\text{liter/minut}}$$

"per minut" försvinner

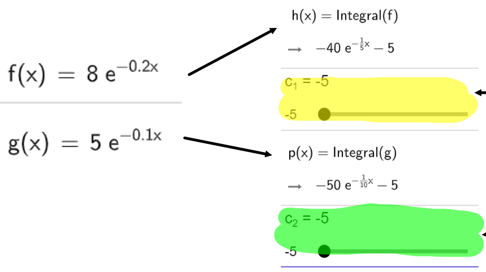
Behållaren kommer att vara tom när antalet liter som runnit ut är lika många som antalet liter som kommit in.

dvs när

$$\int_0^x 8e^{-0,2t}dt = \int_0^x 5e^{-0,1t}dt$$

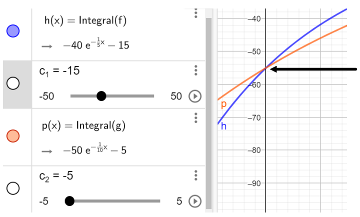
Denna typ av ekvation löses lättast genom att i Geogebra rita ut respektive primitiv funktion, matcha deras startvärde och se var de skär varandra nästa gång.

Primitiv funktion i Geogebra fås via kommandot Integral(Funktion)



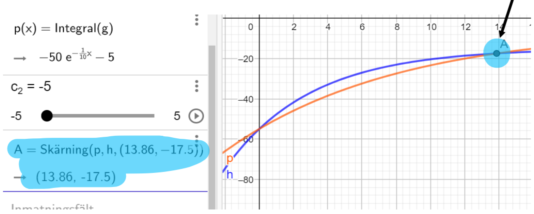
"Värdet på C" för F

"Värdet på C" för G



Ställ in så att de båda graferna skär varandra i origo

Hitta nästa skärningspunkt via kommandot Skärning



Integralerna är lika vid x-värdet 13,86

(OBS! Det går även lösa dessa typer av ekvationer på andra sätt)

Svar:

Efter 13,86 minuter är behållaren åter tom