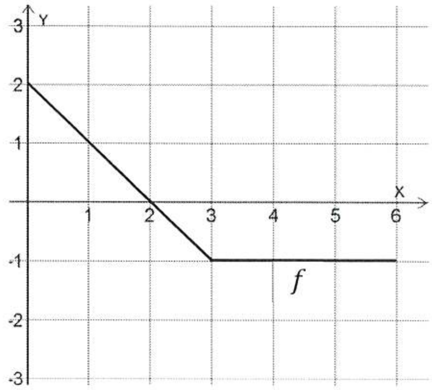
FACIT

5.6 Repetition

Del 1 – Med digitala hjälpmedel – Endast svar krävs

D1. Figuren till höger visar grafen till en funktion, f, som är definerad i intervallet $0 \leq x \leq 6$

Använd grafen för att svara på frågorna nedan.



a) Bestäm värdet av $\int_0^3 f(x)\,dx$

Svar: 1,5 (1/0/0)

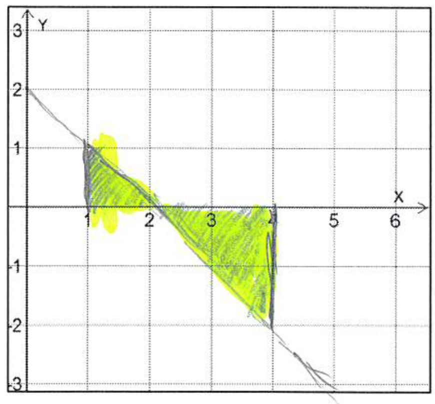
b) Vilket positivt värde på a löser ekvationen $\int_0^a f(x)\,dx = 0$

Svar: a = 4,5 (1/0/0)

D2. a) Rita i det tomma koordinatsystemet till höger ut det område som kan beskrivas av integralen

$$\int_1^4 (2-x)\,dx$$

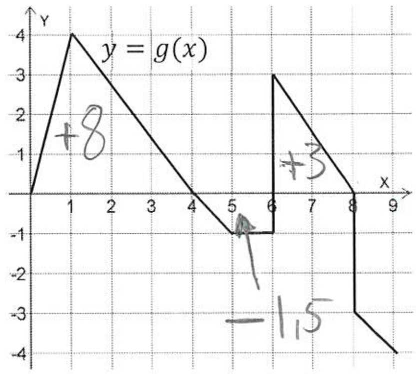
(1/0/0)



b) Bestäm värdet av integralen i a)-uppgiften.

Svar: −1,5 (1/0/0)

D3. Figuren till höger visar grafen till en funktion, g, som är definerad i intervallet $0 \leq x \leq 9$



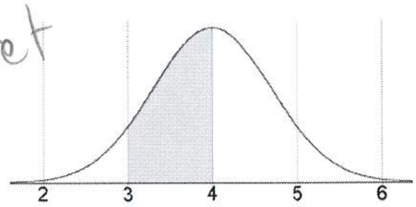
Bestäm **största** värdet av integralen

$$\int_0^a g(x)\,dx$$

Svar: 9,5 (0/1/0)

D4. Grafen till höger visar en normalfördelningskurva med standardavvikelsen 0,7.

Geogebra
– Sannolikhet

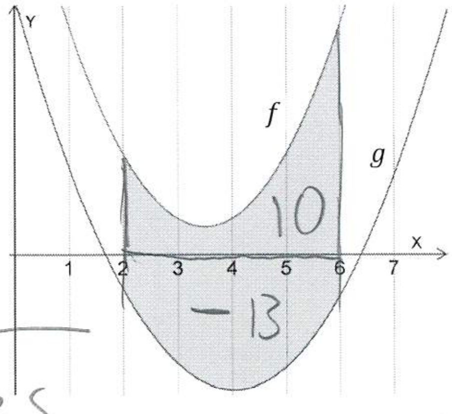


Bestäm arean av det markerade området.

Svar: 0,4234 (0/1/0)

D5. Figuren till höger visar de två funktionerna f och g och ett område mellan dessa.

Områdets area är 23 ae och $\int_2^6 f(x)\,dx = 10$



OBS $\int_2^6 g$ är negativ pga under x-axeln.

Bestäm värdet av $\int_2^6 f(x)\,dx + \int_2^6 g(x)\,dx$

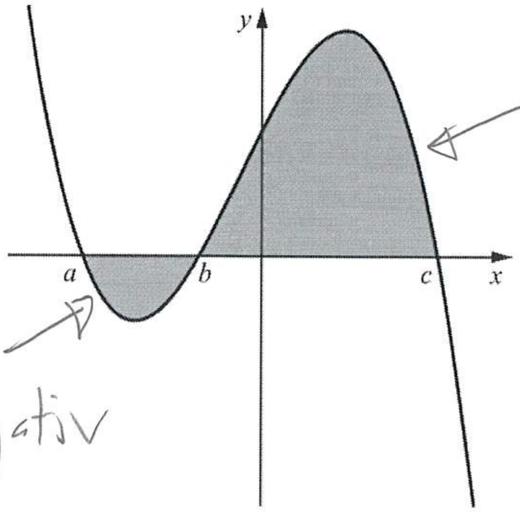
$10 + (-13)$

Svar: -3 (0/1/0)

D6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Figuren visar grafen till funktionen f

$\int_b^c f\,dx$ är positiv



$\int_a^b f\,dx$ är negativ

Vilket av alternativen A-E ger den sammanlagda arean av de områden som markerats i figuren?

A. $\int_a^c f(x)\,dx$

B. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

C. $-\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

$-[\text{Negativ}] + [\text{Positiv}] = [\text{minus minus blir plus}]$

$= \text{Pos} + \text{Pos} = \text{Arean}$

D. $-\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$

E. $-\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^0 f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$

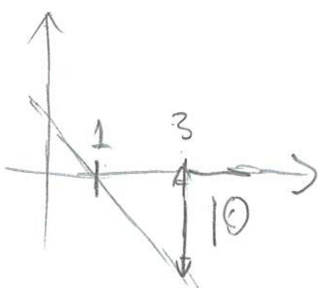
Svar: C (0/1/0)

D7. Ange en valfri *linjär funktion* f som uppfyller

$$\int_1^3 f(x)\,dx = -10$$

exempelvis:

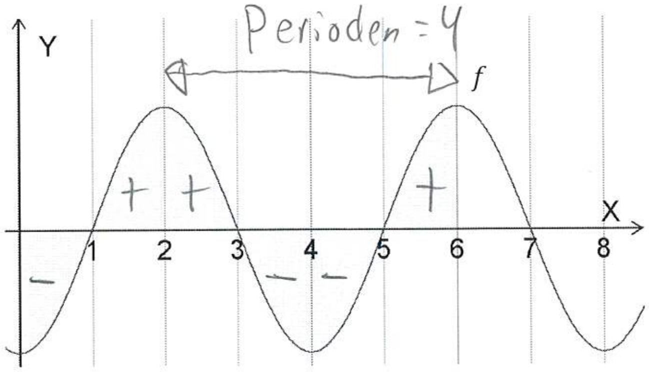
Svar: $y = -5x + 5$ (0/1/0)



$k = -\frac{10}{2} = -5$

D8. Figuren visar grafen till en trigonometrisk funktion på formen $f(x) = A\cos(kx)$ och ett markerat område.

Arean av området är 15 ae.



6 st $= 15$

$\Rightarrow \quad = \frac{15}{6} = 2,5$

a) Bestäm $\int_0^{21} f(x)\,dx$ [Var fjärde x-värde ger integralen noll]

$= 1 \cdot$

Svar: $-\frac{15}{6} = -2,5$ (1/0/0)

b) Bestäm $\int_0^{21} |f(x)|\,dx$ ← Absolutbeloppet ⇒ Bara positiva delar

21 st

Svar: $21 \cdot \frac{15}{6} = 52,5$ (1/0/0)

$\int_0^1 A \cdot \cos(0,5\pi x)\,dx = -\frac{15}{6} \Rightarrow$

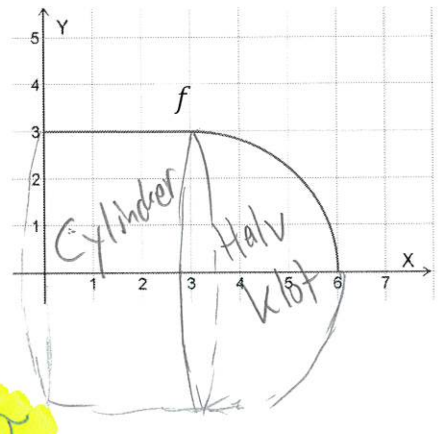
c) Bestäm värdet av konstanten A. *Svara exakt!*

$K = \frac{2\pi}{\text{perioden}} = \frac{2\pi}{4} = 0,5\pi$

$A \cdot \frac{2}{\pi} = -\frac{15}{6}$

Svar: $A = -\frac{5\pi}{4}$ (0/0/1)

D9. Figuren visar grafen till en funktion, f som består av en horisontell rät linje och en kvartscirkel.



Bestäm värdet av $\int_0^6 \pi \cdot f(x)^2\,dx$

Volymen av en rotationskropp

Svar: 45π (0/0/1)

$= \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{4\pi \cdot 3^3}{3 \cdot 2} = 27\pi + 18\pi$

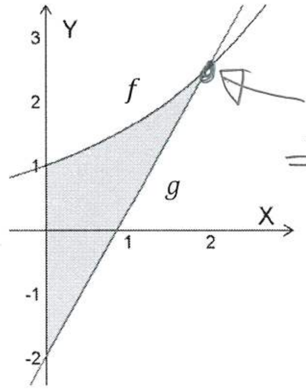
Del 2 – Med digitala hjälpmedel – Uträkningar krävs

D10. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna

$f(x) = 1{,}6^x$ och $g(x) = 2{,}3x - 2$ samt y-axeln

Bestäm arean av området.

Svara med 2 decimalers noggrannhet! (2/0/0)



Skärning $\Rightarrow x \approx 1{,}9639$

Arean ges av $\int_0^{1{,}9639} (f-g)\,dx$

$\approx \left[\text{IntegralMellan}(f, g, 0, 1{,}9639)\right] \approx 2{,}72$

x(A)

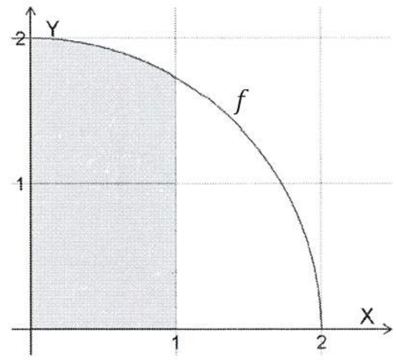
D11. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ och $x = 1$ samt y-axeln

Om området roteras kring x-axeln fås en rotationskropp.

Bestäm volymen av denna rotationskropp

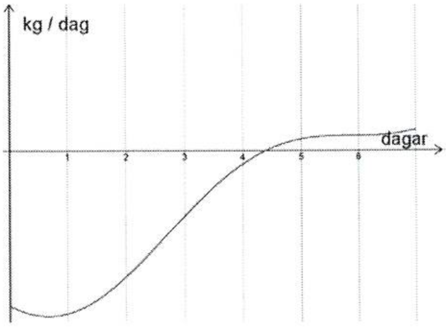
Svara med 2 decimalers noggrannhet! (2/0/0)



Volymen ges av $\int_0^1 \pi \cdot f^2\,dx =$

$= \left[\text{Integral}(pi \cdot f^2, 0, 1)\right] \approx 11{,}52$

D12. En matematiklärare provar en ny diet under en vecka.
Viktförändringen V' beskrivs under veckan av funktionen
$V'(x) = -0{,}3\,(\cos(0{,}3x - 0{,}2))^3 + 0{,}024$
där x är antal dagar som gått av veckan, $0 \leq x \leq 7$



Med hur många kg förändrades lärarens
vikt av dietveckan? (1/1/0)

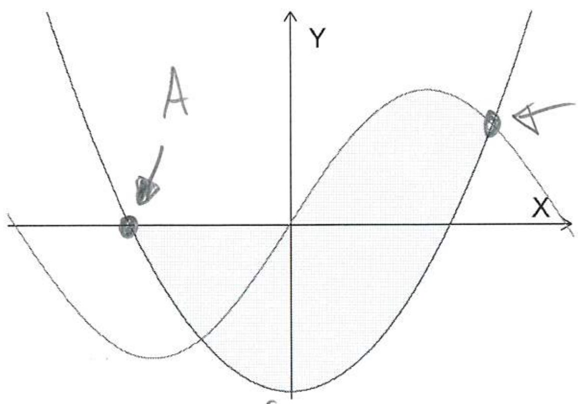
Om funktionen visar kg/dag

kommer antalet kg ges av $\int$

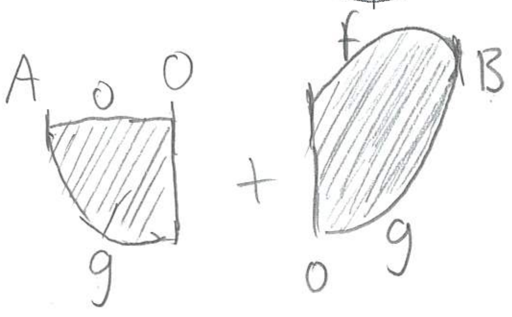
$$\int_0^7 V' \, dx = \left[\text{Integral}(f, 0, 7) \right] \approx -0{,}6919$$

$\Rightarrow$ Vikten minskade 0,69 kg

D13. Figuren nedan visar graferna till $f(x) = 1{,}2\sin(1{,}5x)$ och $g(x) = x^2 - 1{,}5$,
och ett markerat område.
Bestäm arean av detta område. (2/1/0)
Svara med 3 decimaler!



Skärning ger
$A = (-1{,}2247 \,;\, 0)$
$B = (1{,}5435 \,;\, 0{,}8825)$

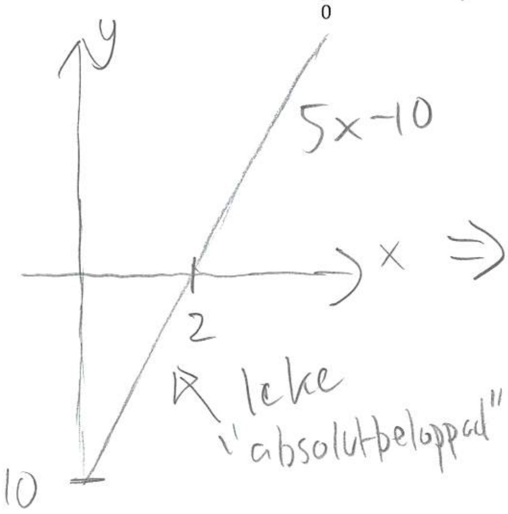


$$= \int_{-1{,}2247}^{0} (0 - g)\,dx + \int_0^{1{,}5435} (f - g)\,dx =$$

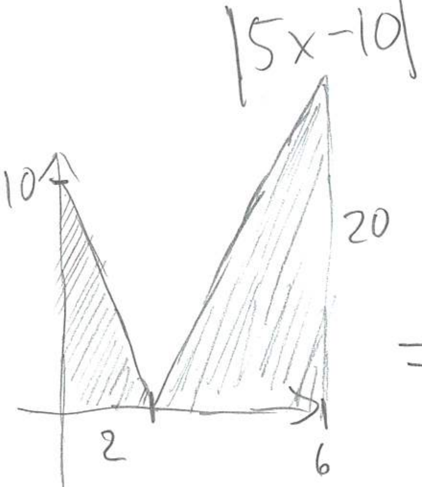
$$= \left[\text{IntegralMellan}(0, g, x(A), 0) + \text{IntegralMellan}(f, g, 0, x(B)) \right] \approx$$

$\approx$ 3,6563 $\approx$ 3,656

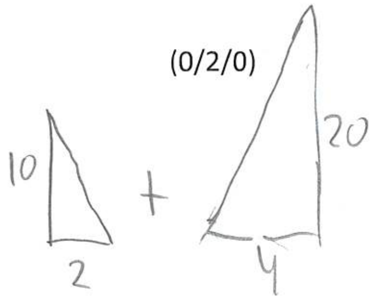
D14. Bestäm värdet av $\int_0^6 |5x-10|\,dx$ (0/2/0)



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



$= \frac{2 \cdot 10}{2} + \frac{4 \cdot 20}{2} =$

$= 10 + 40 = 50$

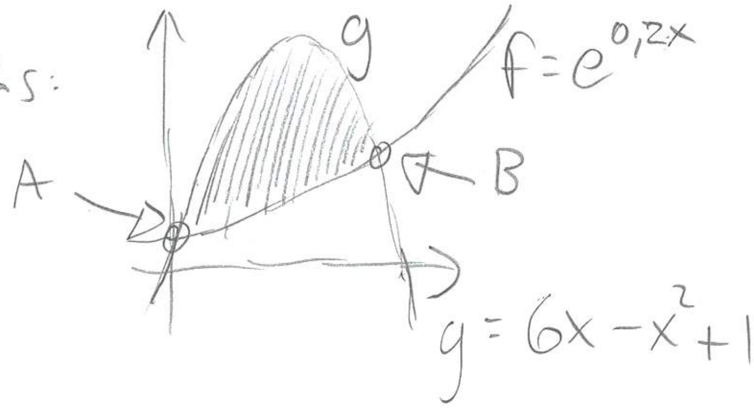
Kan också beräknas med Integral(|5x−10|, 0, 6)

D15. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (1/1/0)

Ett område begränsas av kurvorna $y = e^{0,2x}$ och $y = 6x - x^2 + 1$

Teckna ett integraluttryck för arean av detta område och bestäm ett närmevärde till denna area med minst 3 värdesiffror.

Ritas graferna fås:



Skärning ger

A = (0, 1)

B = (5,62997 ; 3,08328)

Arean ges av

$$\int_0^{5,62997} (g - f)\,dx =$$

$= [\text{IntegralMellan}(g, f, x(A), x(B))] \approx 30,81969$ ae

D16. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Antalet bin i ett bisamhälle efter t veckor betecknas $n(t)$. Från början är antalet bin 5000. Biodlaren tecknar uttrycket $5000+\int_0^{15} n'(t)\,dt$

a) Vad betyder den andra termen i uttrycket? (0/1)

b) Vad betyder hela uttrycket? (0/1)

a) $\int_0^{15} n'\,dt$ = "Integralen av antal bin/vecka" $\Rightarrow$ antalet bin som läggs till vecka 0 till 15

b) $5000+\int_0^{15} n'\,dt$ = "Antalet bin från början" + "Antalet bin som lagts till vecka 0 till 15"

= "Totala antalet bin efter vecka 15"

D17. Sannolikheten för att komma fram till en viss myndighets telefonsupport efter x minuters väntan ges av täthetsfunktionen

$$f(x)=\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}$$

a) Hur stor är sannolikheten att få prata med supporten inom 5 minuter? (0/2/0)

Sannolikheten ges av integralen av täthetsfunktionen

$$\int_0^5 f\,dx = [\text{Integral}(f,0,5)] \approx 0{,}5654$$

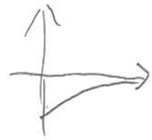
$\Rightarrow$ 56,5 %

b) Hur många minuter har det gått innan 60 % har kommit fram till supporten? (0/2/0)

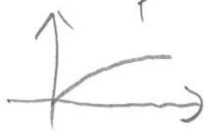
Önskar lösa ekv: $\int_0^x f\,dt = 0{,}6$

ex. via skärning med den primitiva funktionen:

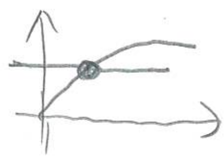
1. Primitiv: Integral(f)



2. Flytta upp till origo (+1)



3. Skärning med $y=0{,}6$



$x \approx 5{,}4977$

$\Rightarrow$ Efter ca 5,5 minuter

(kan även lösas på andra sätt)

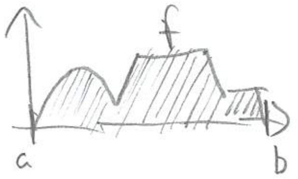
D18. En elev, som tycker det är jobbigt att integraler kan ge negativa "areavärden", medan riktiga areor mellan x-axeln och en funktionsgraf alltid är positiva, föreslår en metod som alltid ger arean mellan x-axeln och funktionsgrafen, oavsett om funktionen är över eller under x-axeln.

- *"Om du istället för att ta integralen av funktionen istället tar integralen av dess **absolutbelopp**, kommer svaret alltid motsvara arean som täcks in mellan funktionen och x-axeln"*

Har eleven rätt? (0/2/0)

Motivera ditt svar!

Eleven menar att areor och integraler är samma sak så länge funktionen har positiva delen. Det i sin tur är helt sant.

Ex: 

Arean ges av $\int_a^b f\,dx$

Eftersom absolutbeloppet gör alla funktioner positiva kommer det alltid bli som situationen ovan $\Rightarrow$ Eleven har rätt!

~~D18~~ D19. Bestäm det värde på a som löser ekvationen (0/2/0)

$$\int_0^a e^{x-1}\,dx = \int_0^a \left(x^3 - \sqrt{x}\right)dx$$

Svara med 2 decimaler!

$f = e^{x-1}$

$g = x^3 - \sqrt{x}$

Rita ut de båda primitiva funktionerna och hitta deras skärningspunkt.

f: 1. Primitiv: Integral(f) (F) 

2. Flytta till origo: $F - F(0)$ 

g: 1. Primitiv: Integral(g) (G) 

2. Redan flyttad till origo

Skärning $\Rightarrow$ $x \approx 2{,}05718$

$\Rightarrow$ $a \approx 2{,}057$

D20

~~D19~~. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

De styrande i ett land är osäkra på befolkningsutvecklingen i landet. De anlitar två olika konsulter för att de ska göra var sin prognos över befolkningsutvecklingen de kommande åren.

f: tusen personer/år

$\int$: tusen personer

Den första konsulten anser att folkmängden kommer att växa med hastigheten $100e^{0,02t}$ tusen personer per år.

Den andra konsulten anser att folkmängden kommer att växa med hastigheten $100 + 0,2t + 0,02t^2$ tusen personer per år.

I båda prognoserna är t tiden i år räknat från början av år 2000.

Prognoserna ger olika besked om hur mycket befolkningen kommer att öka. Hur stor är skillnaden i folkmängd mellan de båda prognoserna i början av år 2015?

Prognos 1 $\Rightarrow$ $\int_0^{15} 100e^{0,02t}\,dt = [\text{Integral}] \approx 1749$

Prognos 2 $\Rightarrow$ $\int_0^{15} (100 + 0,2t + 0,02t^2)\,dt = [\text{Integral}] \approx 1545$

Skillnaden är $1749 - 1545 =$ 204 tusen personer

D21

~~D20~~. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$

$L = \int_1^4 \sqrt{1 + (f')^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} f' \text{ ges av kommandot} \\ \text{Derivera( )} \\ f' = \frac{3}{2} \cdot \left(x - \frac{4}{9}\right)^{1/2} \end{array}\right]$

$= [\text{Integral}(\text{sqrt}(1 + (f')^2), 1, 4)] = 7$

D22
~~D21~~. Enligt en studie gjord av en elev som gjorde ett gymnasiearbete om uttrar så är vikten hos populationen uttrar i Norrforsen normalfördelad med medelvärdet 9 kg och standardavvikelsen 0,7 kg.

Antag att två helt slumpartat valda uttrar fångas in för vägning.

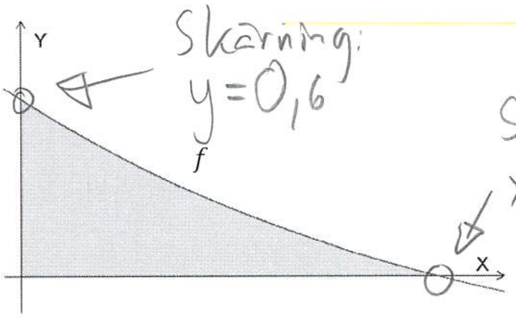
Hur stor är sannolikheten att BÅDA dessa uttrar väger mindre än 8 kg? (0/2/0)

Geogebra → Sannolikhet → Normalfördelning $\mu = 9$, $\sigma = 0,7$ $\boxed{]}$ $x \le 8$

$\Rightarrow 0,0766 \Rightarrow$ Sannolikheten för EN utter är 0,0766

För 2 st $\Rightarrow 0,0766 \cdot 0,0766 \approx 0,00587 \Rightarrow 0,6\,\%$

D23
~~D22~~. Figuren till höger visar grafen till funktionen $f(x) = 0,6^x - 0,4$ och det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och grafen.



Skärning: $y = 0,6$

Skärning $x \approx 1,79374$

Om området roteras kring x-axeln fås en rotationskropp.

Om området istället roteras kring y-axeln fås en annan rotationskropp.

Undersök vilken av dessa båda rotationskropparna som har störst volym, samt ta reda på volymskillnaden.

Svara med 2 decimalers noggrannhet! (0/4/0)

Runt x-axeln: $\int_0^{1,79374} \pi \cdot f^2\,dx \approx 0,53263$ ve

Runt y-axeln: $\int_0^{0,6} \pi \cdot x^2\,dy = $ [Lös ut x ur formeln:

$y = 0,6^x - 0,4 \Rightarrow y + 0,4 = 0,6^x$

$\ln(y+0,4) = \ln 0,6^x$

$\dfrac{\ln(y+0,4)}{\ln(0,6)} = x$]

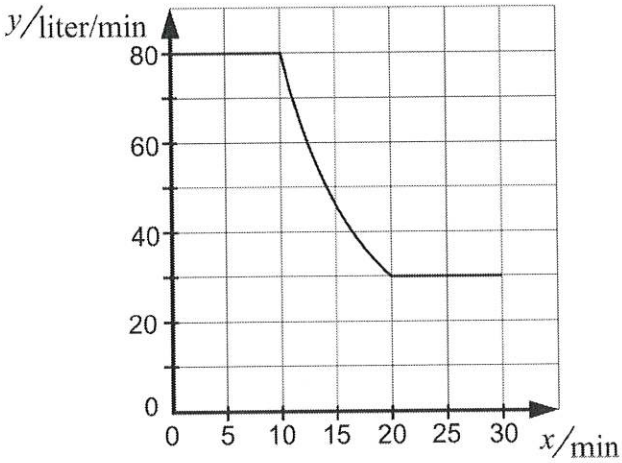
$= \int_0^{0,6} \pi \left(\dfrac{\ln(y+0,4)}{\ln(0,6)}\right)^2 dy = [\text{Integral}] \approx 1,5788$ ve

Volymskillnaden $= 1,5788 - 0,53263 \approx 1,046$ ve

Den runt y-axeln har störst volym.

~~D23~~ D24. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En från början tom tank fylls med vatten. I bilden nedan visas hur påfyllningshastigheten y liter/min beror av tiden x min. På grund av minskat vattentryck sjönk hastigheten under en tiominutersperiod. Under denna period kan påfyllningshastigheten beskrivas med funktionen $y = \dfrac{1000}{x} - 20$

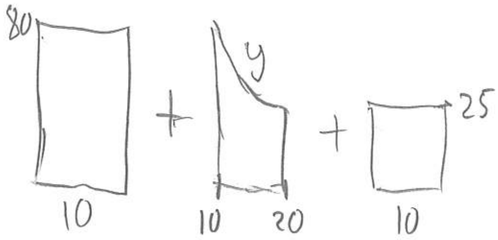


a) Teckna ett uttryck för volymen vatten i tanken efter 30 min och beräkna värdet. (0/2)

b) Efter hur lång tid är volymen vatten i tanken 1000 liter? (0/2)

Eftersom funktionen visar liter/min kommer antalet liter ges av integralen.

a) $\int_0^{30} f\,dt =$

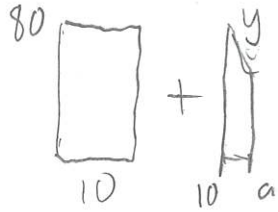


$= 800 + \int_{10}^{20}\left(\frac{1000}{x} - 20\right)dx + 250$

$= 1050 + \int_{10}^{20}\left(\frac{1000}{x} - 20\right)dx$

b) Vill lösa ekv

$\int_0^{x} f\,dt = 1000 \Rightarrow$



$= 1000 \Rightarrow \int_{10}^{a}\left(\frac{1000}{x} - 20\right)dx = 200$

Kan lösas på många sätt ex via glidare.

$\int_{10}^{a}\left(\frac{1000}{x} - 20\right)dx = 200 \Rightarrow a \approx 12{,}97$

Efter ca 13 minuter

~~D24~~ D25. Bestäm värdet av $\int_0^{\pi/3} (2\sin(x) + 2) \cdot \cos(x)\, dx$ (0/0/2)

Svara exakt (prova att göra uppgiften utan CAS-läge)!

Algebraiskt: $\int_0^{\pi/3} \left((2\sin(x)+2)\cdot\cos(x)\right) dx =$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\right) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Trig. formel:} \\ 2\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(2x)\end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(\sin(2x) + 2\cos(x)\right) dx = \left[\text{Primitiv: } -\frac{\cos(2x)}{2} + 2\sin(x)\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \left(-\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(-\frac{\cos(2\cdot 0)}{2} + 2\sin(0)\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Tabell på formelbladet:} \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(0) = 1 \quad \sin(0) = 0\end{array}\right]$$

$$= \left(-\frac{-\frac{1}{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\cdot 0\right) = \frac{1}{4} + \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \sqrt{3}$$

CAS:
(Perspektiv → CAS)

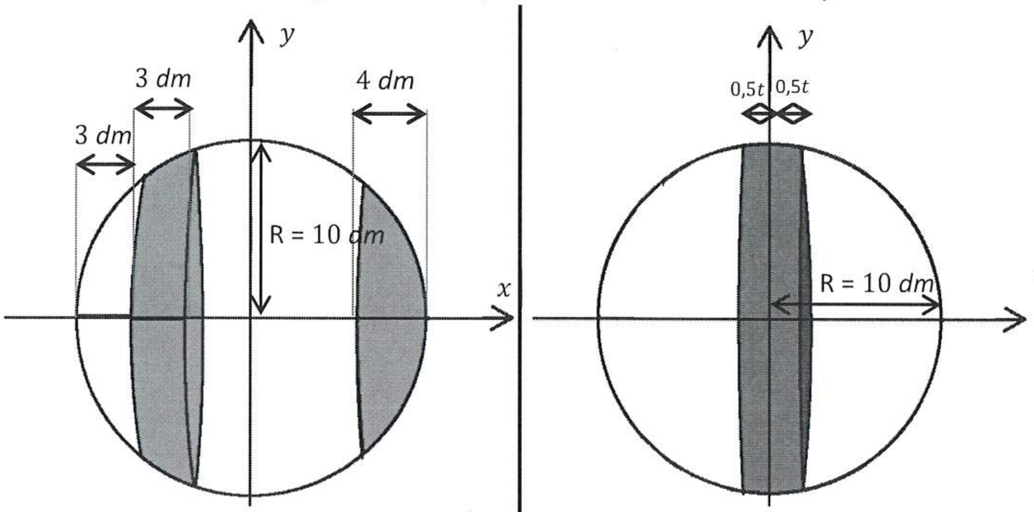
Skriv "Integral((2sin(x)+2)cos(x), 0, $\frac{Pi}{3}$)"

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{3} + 3}{4}$$

~~D25~~ D26. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt Mattias-prov. Lös uppgiften.

En konstnär vill tillverka ett glaskonstverk föreställande en jättestor hamburgare.
Konstnären tänker sig att hamburgerbrödet utgörs av två *klotsegment* med mått enligt den vänstra figuren, och att köttbiten ska utgöras av en symmetriskt mittensegment enligt figuren till höger.

För fulländad estetik tänker sig konstnären att köttet ska ha samma volym som **hela brödet.**



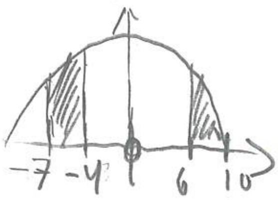
Brödets över och underdel, som tillsammans bildar hela brödet

Köttet, som utgörs av ett **symmetriskt** mittensegment

Hjälp konstnären att bestämma tjockleken på köttet, t. (0/1/3)

Klotsegment fås via rotation av delar av en halvcirkel
Ekvationen för en halvcirkel med $r = 10$ och centrum i origo (Pyth. sats, eller cirkelns ekv): $y = \sqrt{10^2 - x^2}$

Brödet:



$$\Rightarrow \int_{-7}^{-4} \pi y^2 dx + \int_{6}^{10} \pi \cdot y^2 dx = [\text{Integral}]$$

$$\approx 650,3 + 435,6 \approx 1085,94 \text{ dm}^3$$

Köttet:

$$\Rightarrow \int_{-0,5t}^{0,5t} \pi y^2 dx = 1085,94$$

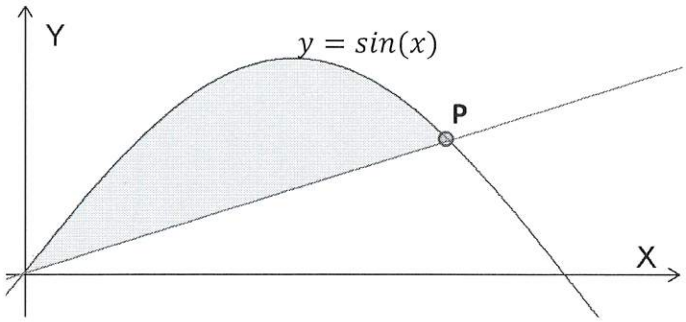
"Samma volym som brödet"

Kan lösas med ex glidare: $\Rightarrow$ $t \approx 1,75$ dm

~~D26~~ D27. Grafen till funktionen $y = \sin(x)$ i intervallet $0 \le x \le \pi$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område.

Detta område kan delas i två lika stora delar med hjälp av en rät linje som går igenom origo.

Linjen skär grafen i en punkt, **P**. Se figur.



Bestäm x-koordinaten hos **P**. (0/0/3)

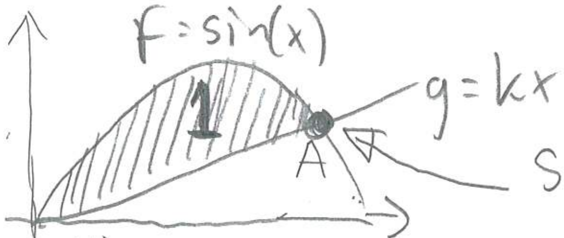
Svara med 3 decimaler!

Börja med att bestämma arean av hela området

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [\text{Integral}] = 2$$

Linjens ekv: $g = k \cdot x$

$\Rightarrow$ Söker det värde på k som gör att arean $= 1$



$A = \text{Skärning}(f, g)$

$$\int_0^{x(A)} (f - g)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{x(A)} (\sin(x) - kx)\,dx = 1$$

Kan lösas, ex med glidare:

$f = \sin(x)$

$g = k \cdot x$

$A = \text{Skärning}(f, g)$

IntegralMellan$(f, g, 0, x(A))$

$k \approx 0{,}2567\ldots$

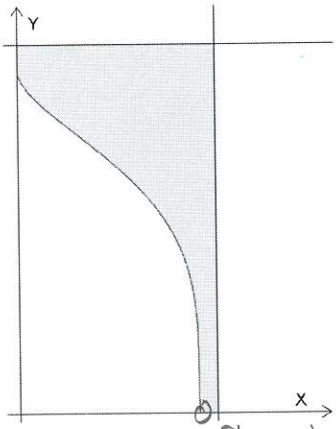
x-värdet blir då $x \approx 2{,}459$

D28

~~D27~~. En designer vill bygga en fontän av cement. Som grund används en rotationskropp.

Området som ska roteras visas nedan och det begränsas av funktionerna

$y = 2{,}3$
$x = 1{,}2$
samt den del av $\frac{y^4}{15} + \sqrt{x} = 1$ som ligger i första kvadranten



← skärning ⇒ $x = 1$

Hur mycket cement krävs för att bygga fontänen om alla mått anges i m?

(0/1/3)

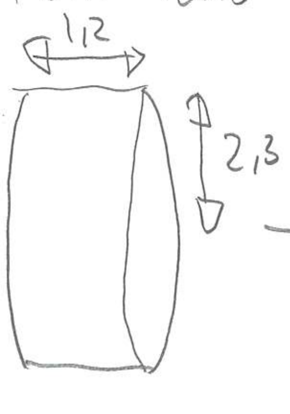
Lös ut y ur $\frac{y^4}{15} + \sqrt{x} = 1 \Rightarrow$

$$y = \sqrt[4]{15(1-\sqrt{x})}$$

"Gropens" volym ges av rotationen kring x-axeln: $\int_0^1 \pi \cdot y^2 \, dx$

$= [\text{Integral}] \approx 6{,}49 \text{ m}^3$

Fontänens volym fås via:



$-$ "gropen" $= \pi \cdot 2{,}3^2 \cdot 1{,}2 - 6{,}49$

$\approx 13{,}45 \text{ m}^3$