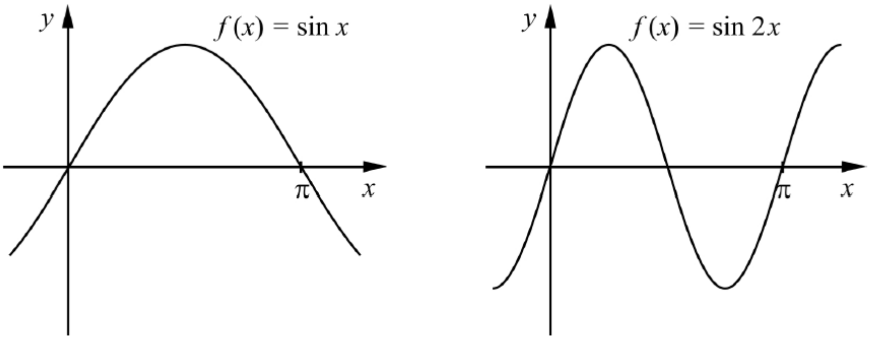
Några gamla NP-uppgifter om Integraler (≈ C/A)

Utan digitala hjälpmedel - Uppgift 1.

I den här uppgiften ska du undersöka hur värdet av integralen $I = \int_0^{\pi} \sin kx \, dx$ beror av k, där k är ett positivt heltal.

- Börja med att beräkna I för $k = 1$ och för $k = 2$



- Beräkna I för ytterligare några värden på k och redovisa resultaten i en tabell.

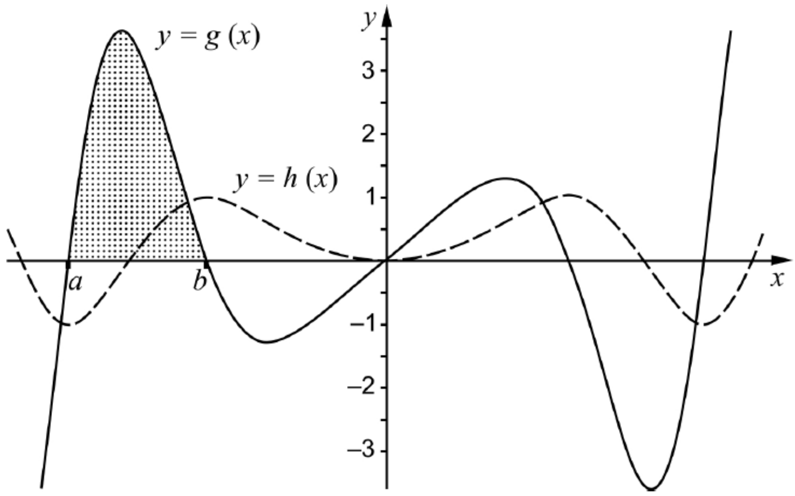
k	I
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- Formulera en slutsats om hur integralens värde I beror av konstanten k.

- Visa att din slutsats gäller för alla positiva heltal k. (2/4/¤)

Utan digitala hjälpmedel - Uppgift 2.

Figuren visar en funktion och dess derivata.
Använd figuren för att beräkna arean av det markerade området. (0/1/¤)

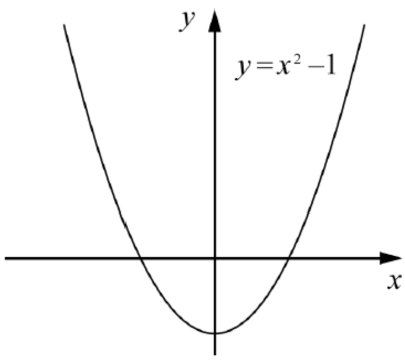


Utan digitala hjälpmedel - Uppgift 3.

Undersök integralen $\int_a^b (x^2 - 1)\,dx$ då $a < b$

a) Bestäm a och b så att integralens värde blir så litet som möjligt. (0/1)

b) Bestäm vilka värden integralen kan anta. (0/1/¤)



Facit - Uppgift 1.

Elevlösning 3 (2 g och 4 vg och tre MVG-kvaliteter)

- $I = \int_0^{\pi} \sin(1x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) =$

$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$ a.e.

$\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos 2\pi}{2} - \left(\frac{-\cos 0}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$I = \int_0^{\pi} \sin 3x\,dx = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos 3\pi}{3} - \left(\frac{-\cos 0}{3}\right) =$

$= -\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

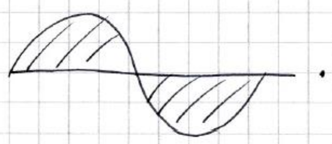
$I = \int_0^{\pi} \sin 4x\,dx = \left[-\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos 4\pi}{4} - \left(-\frac{\cos 0}{4}\right) =$

$= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\int_0^{\pi} \sin 5x\,dx = \left[-\frac{\cos 5x}{5}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos 5\pi}{5} - \left(-\frac{\cos 0}{5}\right) =$

$= -\left(\frac{-1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Slutsats: Integralen $= 0$ för alla jämna heltal. Detta pga att kurvan varit över och under x-axeln lika många gånger innan $x = \pi$



För udda heltal.

Integralen blir då arean av en halv period.

- Jämna heltal är $I = 0$
  Udda heltal = arean av en halv period som skrivs med formeln $I(n)$ - där n är alla udda heltal $= \frac{2}{n}$

bevis: $\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} =$

$= -\left(\frac{\cos nx}{n}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{n}\right) =$

$= -\frac{-1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{n}}}$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	X	1/2	
Matematiska resonemang	X	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	0/1	
Summa		**2/4**	

Kommentar: Eleven löser hela uppgiften med generell metod. Lösningen är korrekt och tydlig. Sammantaget ger lösningen 2 g- och 4 vg-poäng samt de tre möjliga MVG-kvaliteterna.

Facit – Uppgift 2.

Exempel på en elevlösning och hur den poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 vg och en MVG-kvalitet)

$$\int_a^b g(x)\,dx = \left[h(x)\right]_a^b = h(b) - h(a) = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

SVAR: 2 a.e.

Kommentar: Eleven identifierar vilken funktion som är derivata genom integraluppställningen och löser uppgiften korrekt. Sammantaget ger lösningen 1 vg-poäng och MVG-kvaliteten för analys och slutsats.

Facit – Uppgift 3.

Elevlösning 3b (1 vg och två MVG-kvaliteter)

b) Det minsta värdet på integralen ges av det a och b värde som bestämdes i a).

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Det största värde integralen kan anta går emot oändligheten. Jag integrerar funktionen med intervallet a och b.

$$\int_{a}^{b} (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{a}^{b} = \frac{b^3}{3} - b - \left(\frac{a^3}{3} - a\right) =$$

$$= \frac{b^3}{3} - b - \frac{a^3}{3} + a$$

Desto större b-värde som väljs, desto större kommer värdet på integralen bli. Desto mindre a-värde som, dvs. ett negativt värde, kommer även integralens värde bli större. Detta ger att $\int_{a}^{b} (x^2-1)\,dx \to \infty$

SVAR: $\frac{4}{3} \leq \int_{a}^{b} (x^2-1)\,dx$ samt $\int_{a}^{b} (x^2-1)\,dx \to \infty$

Kommentar: Eleven visar MVG-kvalitet genom att beräkna den allmänna integralen och utifrån resultatet behandla det gränsvärdesproblem som uppstår på ett knapphändigt men godtagbart sätt. Eleven visar också MVG-kvalitet genom att redovisa välstrukturerat och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.