Namn: FACIT

Matematik 4 – Prov, kapitel 2, NA3B

Radianer, Graftransformation, Asymptoter, Trigonometriska funktioner, Trigonometriska ekvationer

Del 1a – Utan digitala hjälpmedel - Endast svar krävs! Skriv svaren direkt på provpappret.

1. Hur många radianer är 15° ?

$15^\circ = \frac{30^\circ}{2} = [FB] = \frac{\pi/6}{2} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2}$

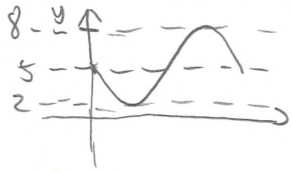
Svar: $15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ (1/0/0)

2. Bestäm ett exakt värde på cos (330°)

$= \cos(-30^\circ) = \cos(30^\circ) = [FB] = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/0/0)

3. Utgå från funktionen $f(x) = 5 - 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ $\Rightarrow$



a) Bestäm funktionens **största värde**.

"Mitten" + "Amplituden"
5 + 3

Svar: 8 (1/0/0)

b) Bestäm funktionens **period**.
Svara i grader eller radianer

$\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$P = \frac{360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{\left(\frac{1}{2}\right)}$

Svar: $720^\circ = 4\pi$ (1/0/0)

4. Bestäm den lodräta och vågräta asymptoten till $f(x) = \frac{4 + 2x}{x - 3} + \frac{1}{2}$

"Lodräta" $\Rightarrow$ Nämnaren = 0
$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

"Vågräta" $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x)$
$= \frac{2x}{x} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

Svar: $x = 3$

$y = \frac{5}{2} = 2,5$ (1/1/0)

5. Hitta två lösningar till ekvationen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ $\left[FB: \begin{matrix} \cos \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \frac{\pi}{3}\right]$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
$x_2 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

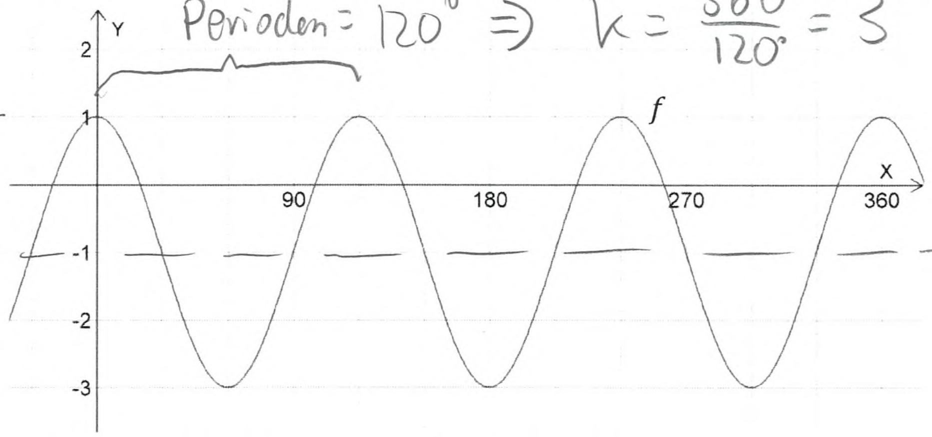
Svar: $x_1 = \frac{\pi}{3}$

$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ (2/0/0)

6. I figuren visas grafen till en trigonometrisk funktion, f

Perioden = 120° $\Rightarrow$ $k = \frac{360}{120^\circ} = 3$

Amplituden = 2 $\Rightarrow$ $A = 2$



Mittlinjen = -1 $\Rightarrow$ $B = -1$

a) Funktionen kan skrivas $f(x) = A\cos(kx) + B$
Bestäm konstanterna A, B och k.

Svar: $A =$ 2

$B =$ -1

$k =$ 3 (1/1/0)

b) Funktionen kan även skrivas $f(x) = A\sin(k(x + v)) + B$
där A, B och k har samma värden som tidigare. $\Rightarrow$ OBS! MED ( )
Bestäm ett värde på konstanten v $\Rightarrow$ v innebär förskjutn. i x-led

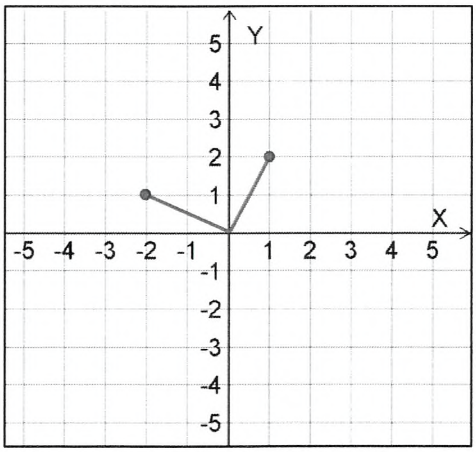
exempelvis:

Svar: $v =$ -90° eller $+30^\circ$ (0/1/0)

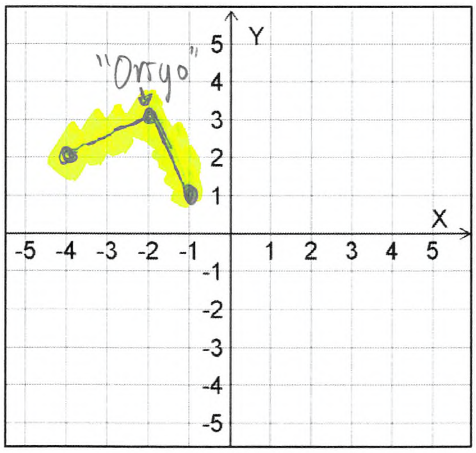
($90^\circ \rightarrow$) ($30^\circ \leftarrow$)

7. I det vänstra koordinatsystemet nedan visas grafen till funktionen $y = g(x)$

Rita i det högra koordinatsystemet grafen till $y = -g(x + 2) + 3$ (1/1/0)



$y = g(x)$



$y = -g(x + 2) + 3$

Grafen vänd

Origo flyttad 2 steg åt vänster och 3 steg upp

8. Figuren visar graferna till två funktioner med asymptoter.
Båda dessa funktioner finns med i listan nedan.

A $\quad y = \dfrac{4x+2}{x-3} + 0{,}5x$

B $\quad y = \dfrac{4x+2}{x+3} - 0{,}5x$

C $\quad y = \dfrac{4x+2}{x+3} + 0{,}5x$

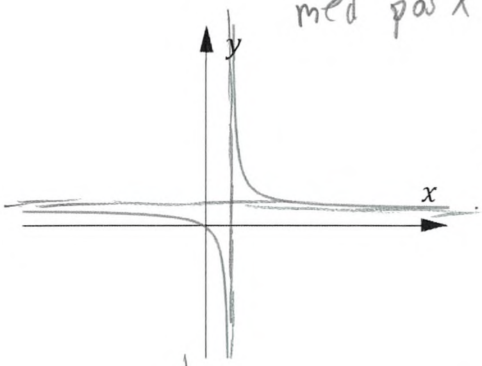
D $\quad y = \dfrac{4x+2}{x-3} - 0{,}5x$

E $\quad y = \dfrac{4x+2}{x-3}$

F $\quad y = \dfrac{4x+2}{x+3}$

Vertikal asymp. med pos X

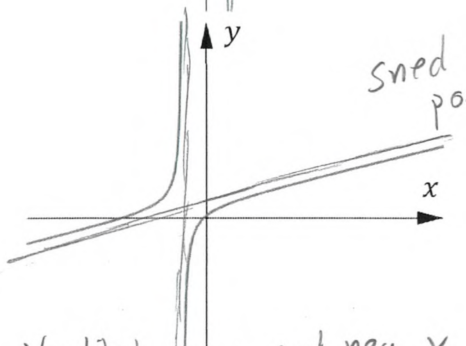
$\Rightarrow \dfrac{4x+2}{x-3}$



Horisontell asymp. med pos y

Sned asymptot med pos. k-värde

$\Rightarrow \dfrac{4x+2}{x+3} + -0{,}5x$

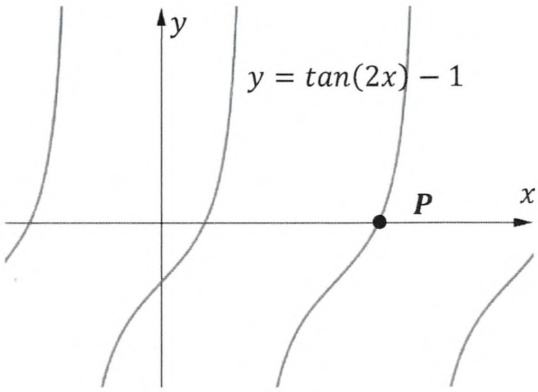


Vertikal asymp. med neg. X

Ange **vilka två** av alternativen A – F som graferna visar.

Svar: B, E (0/1/0)

9. Figuren visar delar av grafen till funktionen $y = \tan(2x) - 1$.



OBS! tan x har perioden 180°

$k = 2 \Rightarrow$ Perioden $= \dfrac{180°}{2} = 90°$

a) Bestäm funktionens ***period***. Svara i radianer *eller* grader.

Svar: $90° = \dfrac{\pi}{2}$ (1/0/0)

P motsvarar en lösning till "$y=0$"

b) Punkten $\boldsymbol{P}$ är en skärningspunkt med x-axeln.

Bestäm x-värdet för punkten $\boldsymbol{P}$. Svara i radianer *eller* grader.

$\tan(2x) - 1 = 0 \Rightarrow \tan(2x) = 1$

Svar: $112{,}5° = \dfrac{5\pi}{8}$ (0/1/0)

$\left[\text{FB: } \tan 1 \Rightarrow 45°\right] \Rightarrow 2x = 45° + n \cdot 180°$

$x = 22{,}5 + n \cdot 90°$ $\quad$ P motsvarar $n = 1$

10. Ange en trigonometrisk funktion, f, som uppfyller villkoren nedan:

- *Funktionen har ett maximum vid* $x = 3°$
- $f(x) = f(x + 20°)$ *för alla värden på* x $\Rightarrow P = 20 \Rightarrow k = \frac{360}{20} = 18$

Eftersom villkoret gällde maximum är det lättast att tänka en cos-graf som flyttats $3°$ →

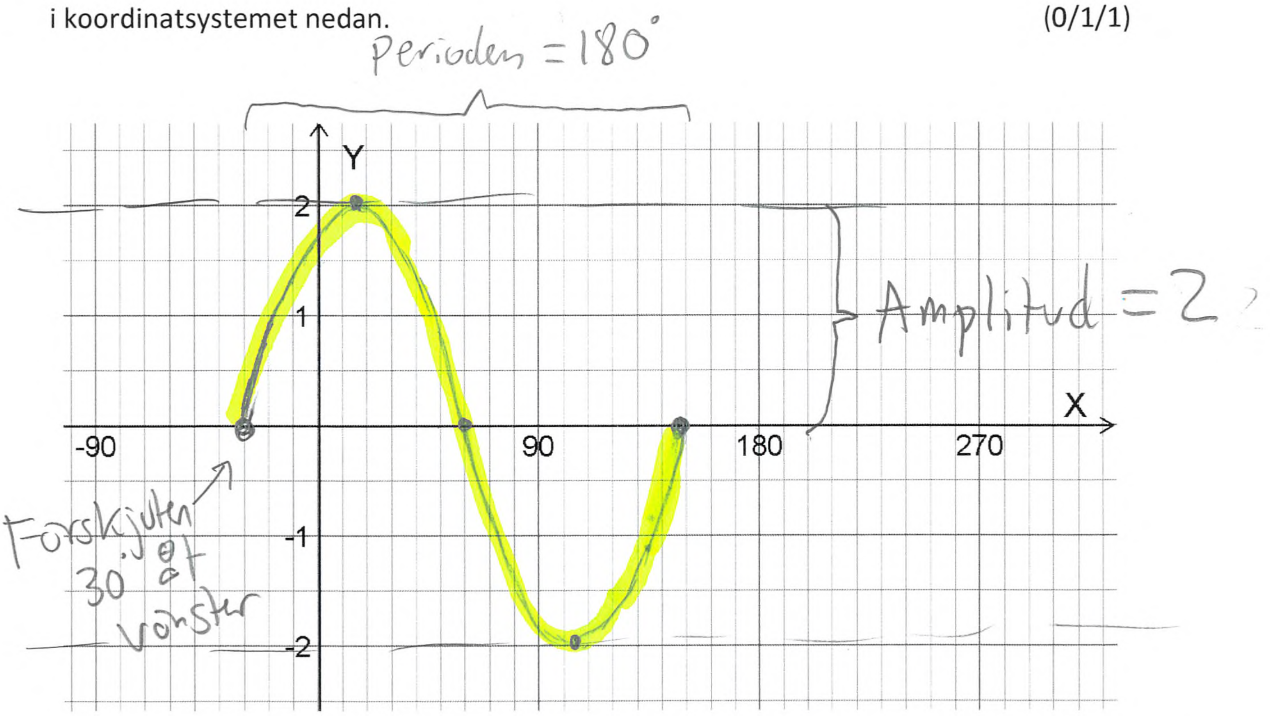
exempelvis:

Svar: $f(x) = \cos(18 \cdot (x - 3))$ (0/1/1)

11. Rita minst en period av grafen till funktionen

$f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cdot \cos 2x$

i koordinatsystemet nedan. (0/1/1)



$f(x)$ är summan av en sin och cos med samma period $\Rightarrow$ Formeln $a \cdot \sin(\ ) + b\cos(\ ) = c \cdot \sin((\ ) + v)$ kan användas.

Enligt FB gäller: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \begin{bmatrix} b = \sqrt{3} \\ a = 1 \end{bmatrix} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\tan v = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{bmatrix} b = \sqrt{3} \\ a = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tan v = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$[FB] \Rightarrow v = 60°$

$f(x) = 2 \cdot \sin(2x + 60°)$ För att rita denna, bestäm perioden och förskjutningen

$P = \frac{360°}{2} = 180°$ Förskjutning: Bryt ut 2 ur ( ) $\Rightarrow 2(x + 30°) \Rightarrow 30°$ åt vänster

Del 1b – Utan digitala hjälpmedel – Fullständiga motiveringar krävs.
Skriv svaren direkt på provpappret.

12. Hitta alla lösningar till ekvationen

$$\sin(10x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svara i grader eller radianer! (2/1/0)

Algebraiskt tänk

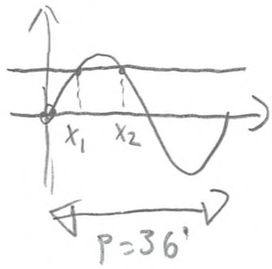
FB: $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 60° \\ 120° \end{matrix}$ ← (Motsvarar alltid $180 - v_1$)

$10x_1 = 60° + n \cdot 360°$ $10x_2 = 120° + n \cdot 360°$

[Dela med 10]

$x_1 = 6° + n \cdot 36°$ $x_2 = 12° + n \cdot 36°$

Grafiskt tänk



$P = \frac{360}{10} = 36°$

x_1 och x_2 fås via FB: $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 60° \\ 120° \end{matrix}$

$10 \cdot x_1 = 60°$
$x_1 = 6°$

$10 \cdot x_2 = 120°$
$x_2 = 12°$ $\Rightarrow$ Alla lösningar:
$x_1 = 6° + n \cdot 36°$
$x_2 = 12° + n \cdot 36°$

13. Lös ekvationen $2\,sin(x) \cdot sin(2x) = sin\,(2x)$ (0/2/0)

* Samla alla termer på en sida om =

$\Rightarrow 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(2x) - \sin(2x) = 0$

* Bryt ut $\sin(2x) \Rightarrow \sin(2x) \cdot (2 \cdot \sin(x) - 1) = 0$

* Lös varje faktor = 0 var för sig

$\sin(2x) = 0$

[FB: $\sin 0 \Rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 180° \end{matrix}$]

$2x_1 = 0° + n \cdot 360°$ $2x_2 = 180° + n \cdot 360°$

[Dela med 2]

$x_1 = 0° + n \cdot 180°$ $x_2 = 90° + n \cdot 180°$

(Kan även skrivas: $x = n \cdot 90°$
pga x_1: 0, 180, 360... ⇒ Var 90:e grad
x_2: 90, 270, 540...)

$2\sin(x) - 1 = 0$ Skriv om på standardform

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

[FB $\sin \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 30° \\ 150° \end{matrix}$]

$x_3 = 30° + n \cdot 360°$

$x_4 = 150° + n \cdot 360°$

14. Azze Ymph Tot resonerar kring den sneda asymptoten till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x + 3}$$

"Då x går mot oändligheten kommer täljaren att domineras av x^2 och nämnaren att domineras av x. Då borde $-4x + 6$ kunna strykas ur täljaren och $+3$ kunna strykas ur nämnaren.

Den sneda asymptoten blir då $\dfrac{x^2 \cancel{-4x+6}}{x \cancel{+3}} = \dfrac{x^2}{x} = x \Rightarrow y = x$ "

Azze har tyvärr fel i sin slutsats.

Bestäm den sneda asymptoten till funktionen f. (0/0/2)

Azzes tänk fungerar tyvärr inte vid funktioner av typ " $\frac{\text{Grad 2}}{\text{Grad 1}}$ ". Det finns flera sätt att hantera dessa, exempelvis "konstanttrixande" eller polynomdivision. (gås igenom i kapitel 1)

"Konstanttrixande": $\rightarrow$

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} = \left[\begin{array}{l}\text{Skriv om } -4x \text{ så att} \\ \text{det innehåller } +3x \\ -4x = 3x - 7x\end{array}\right]$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 7x + 6}{x+3} = \left[\begin{array}{l}\text{Dela upp i} \\ \text{två bråk}\end{array}\right]$$

$$= \frac{x^2+3x}{x+3} + \frac{-7x+6}{x+3} = \left[\begin{array}{l}\text{Faktorisera} \\ x^2+3x \rightarrow x(x+3)\end{array}\right] =$$

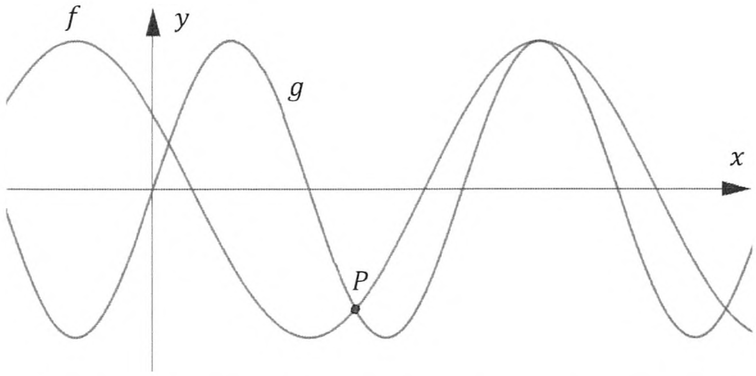
$$= \frac{x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}} + \frac{-7x+6}{x+3} \Rightarrow f(x) = x + \frac{-7x+6}{x+3}$$

Asymptotens m-värde fås via $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-7x+6}{x+3}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-7x+6}{x+3} = \frac{-7x}{x} = -7$

Asymptoten blir: $y = 1x - 7$

15. Figuren visar delar av graferna till funktionerna f och g där

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{och} \quad g(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$



I figuren har en av skärningspunkterna markerats som punkten P.

Visa med beräkningar att punkten P har x-värdet $\dfrac{13\pi}{30}$ (0/0/3)

Skärningspunkter motsvarar lösningar till $f(x)=g(x)$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

Ekv. av typen $\sin(v_1)=\sin(v_2)$ eller $\cos(v_1)=\cos(v_2)$ har två fall:

Här gäller

Fall 1: $v_1 = v_2 + n\cdot 2\pi$

Fall 2: $v_1 = -v_2 + n\cdot 2\pi$

där $v_1 = \left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ och $v_2 = \left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

Fall 1: "$v_1 = v_2 + n\cdot 2\pi$"

$\boxed{\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right) = \left(3x_1-\frac{\pi}{2}\right) + n\cdot 2\pi}$

$\Rightarrow -1x_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$

$\boxed{x_1 = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi} = \frac{25\pi}{30} + n\cdot\frac{60\pi}{30}$

Fall 2: "$v_1 = -v_2 + n\cdot 2\pi$"

$\boxed{\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right) = -\left(3x_2-\frac{\pi}{2}\right) + n\cdot 2\pi}$

$2x_2 + \frac{\pi}{3} = -3x_2 + \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$

$5x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$

$\boxed{x_2 = \frac{\pi}{30} + \frac{n\cdot 2\pi}{5}} = \frac{\pi}{30} + \frac{12\pi}{30}\cdot n$

Detta motsvarar lösningarna:

$\Rightarrow n=0: x_1 = 25\pi/30$, $x_2 = \pi/30$

$n=1: x_1 = 85\pi/30$, $x_2 = 13\pi/30$

P är andra lösningen från y-axeln $\Rightarrow$ x_2 med $n=1$

$\frac{\pi}{30} + \frac{12\pi}{30}\cdot 1 = \frac{13\pi}{30}$ vsv

Namn: FACIT

Matematik 4 – Prov, kapitel 2, NA3B

Radianer, Graftransformation, Asymptoter, Trigonometriska funktioner, Trigonometriska ekvationer

Del 2a – Med digitala hjälpmedel – Endast svar krävs! Skriv svaren direkt på provpappret.

D1. Hur många grader är 180 *radianer*?

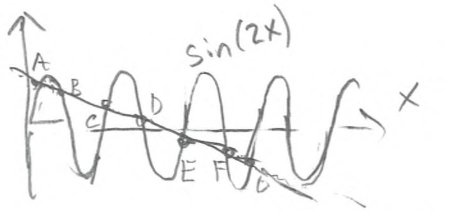
"180 rad" eller

$180 \cdot \frac{180}{\pi}$

Svar: $\sim 10313^\circ$ (1/0/0)

D2. Utgå från funktionerna $f(x) = \sin(2x)$ och $g(x) = 1 - 0{,}2x$.

Ekvationen $f(x) = g(x)$ har flera lösningar.



a) Bestäm **antalet** lösningar till ekvationen.

"Skärning(f,g,0,10)"

A t.om G ⇒ 9 st

Svar: 9 (1/0/0)

b) Bestäm den **minsta** av dessa lösningar.

x-värdet hos punkt A

"x(A)"

Svar: $x \approx 0{,}549$ (1/0/0)

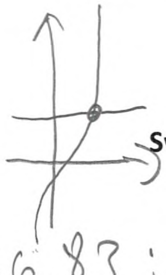
D3. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\tan(2x - 35^\circ) = 0{,}8$

Perioden $= \frac{180}{2} = 90^\circ$

Svara i grader!

"$\tan(2x^\circ - 35^\circ)$" ⇒

"$y = 0.8$"



"Skärning" ⇒ $(36.83 ; 0.8)$

Svar: $x = 36.83^\circ + n \cdot 90^\circ$ (2/0/0)

D4. I funktionen $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ är a, b, c och d konstanter.

Ange värden på dessa konstanter så att funktionen får de två *asymptoterna* $y = 3$ och $x = -2$

exempelvis:

Svar: $a = 3$ $b = 5$ $c = 1$ $d = 2$ (0/1/0)

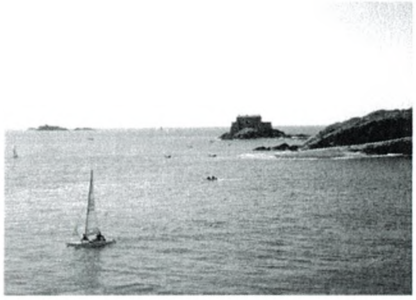
"$x = -2$" ⇒

Nämnaren ska bli noll för $x = -2$ ⇒ ex: $c = 1$, $d = 2$

"$y = 3$" ⇒ kvoten mellan x:en ska bli 3 ⇒ $a = 3 \cdot c$

b spelar ingen roll

D5. Utanför den franska staden Saint Malo som ligger vid kusten mot Engelska kanalen har man funnit att vattendjupet, y meter, under en viss tid varierar enligt sambandet



$$y = 8{,}0 - 5{,}0\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

där t är tiden i timmar räknat från klockan 08.00.

a) Hur stort är vattendjupet vid klockan 12.00?

"Klockan 12"

Svar: 3,7 m (1/0/0)

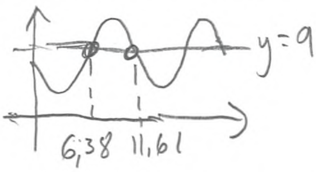
$\Rightarrow$ 4 timmar efter 8.00 $\Rightarrow x = 4$ $\quad f(4) = 8 - 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 4\right)$

b) Hur många timmar under ett dygn kommer vattendjupet vara högre än 9 meter?

"Ett dygn":

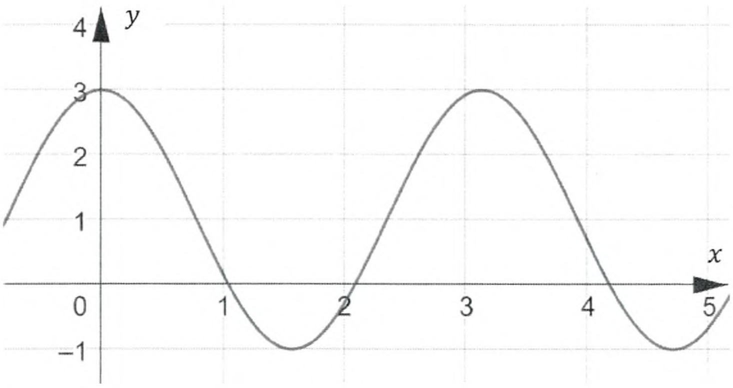
$0 < t < 24 \Rightarrow$

"Skärning"



Svar: $2 \cdot 5{,}23 \approx 10{,}5$ h (0/1/0)

D6. Funktionen $f(x) = \cos^2(x)$ kan transformeras så att den ger grafen nedan.



Utgå från funktionen f och skriv det som saknas i uttrycket nedan för att ge grafen i bilden.

Svar: $y = 4 \cdot f(x) - 1$ (0/0/1)

Den otransformerade versionen av grafen:

$\Rightarrow$ Två transformationer:

↓ Flytta ned x-axeln 1 steg

↕ Dra ut grafen 4 steg

Del 2b – Med digitala hjälpmedel – Fullständiga uträkningar/motiveringar krävs!

D7. Hampus försöker lösa ekvationen $\sin(x) = 1{,}5$ med sitt digitala verktyg.

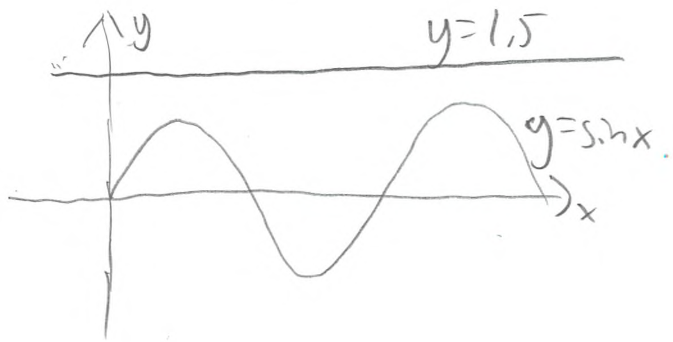
Ekv1: $\sin(x) = 1.5$

l1 $=$ Lös(Ekv1)

$\rightarrow \{\}$

Förklara för Hampus varför han inte får något svar. (1/0/0)

Ritas graferna till sin x och y=1,5 fås:



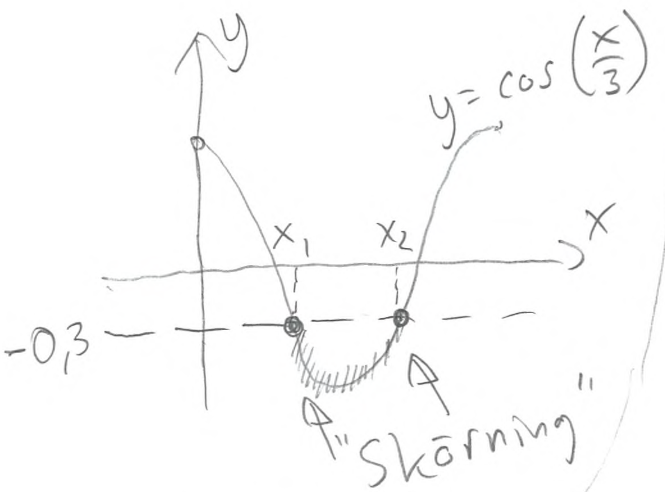
Inga skärnings-punkter

$\Rightarrow$ Inga lösningar.

D8. Bestäm samtliga lösningar till **olikheten** $\cos\left(\frac{x}{3}\right) < -0{,}3$ (1/1/0)

(där x anges i radianer).

Ritas en period av $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ och $y=-0{,}3$ fås:



"$< -0{,}3$" $\Rightarrow$ Området mellan x_1 och x_2

$x_1 \approx 5{,}63$

$x_2 \approx 13{,}22$

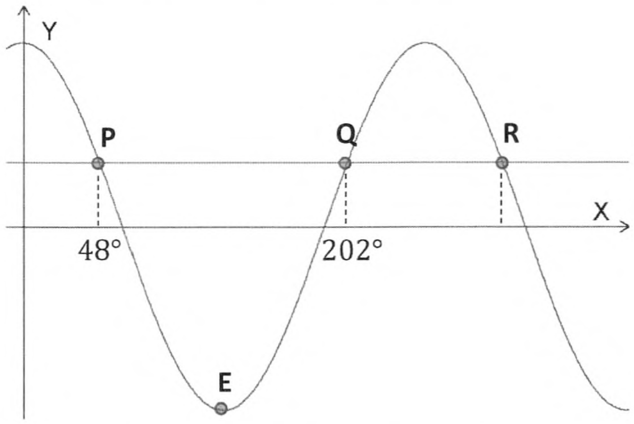
$5{,}63 < x < 13{,}22$

Perioden: $\left(\frac{x}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\cdot x\right) \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

Alla lösningar: $5{,}63 + n\cdot 6\pi < x < 13{,}22 + n\cdot 6\pi$

D9. Nedan visas grafen till en trigonometrisk funktion, som inte förskjutits varken i x-led eller y-led.
Punkterna **P, Q** och **R** har samma y-värde.
Två av deras x-värden visas i bilden.



I grafen finns även vändpunkten **E** markerad. Dess y-värde är -12.

Bestäm koordinaterna för punkt **R**. (0/3/0)

Kan lösas på många sätt, ex regression eller grafens symmetrier.

Symmetrier $\rightarrow$ E ligger mittemellan 48 och 202

$\Rightarrow$ $x(E) = \frac{202+48}{2} = 125$

En hel period motsvarar då

$2 \cdot x(E) = 250° \Rightarrow k = \frac{360}{250} \approx 1{,}44$

$\Rightarrow$ Funktionen är $f(x) = 12 \cdot \cos(1{,}44x°)$

y-värdet är samma hos P, Q och R

$f(48) = f(202) \approx 0{,}3564$

x-värdet hos R är $x(P)$ + en period

$= 48° + 250° = 298°$

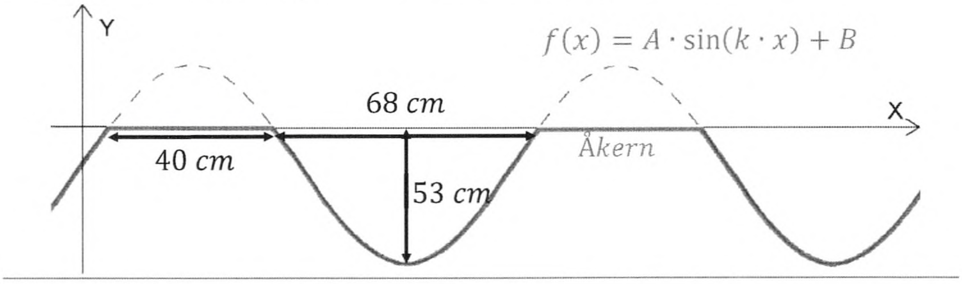
$\Rightarrow$ $R = (298°; 0{,}36)$

D10. När bönder plöjer sina åkrar bildas fåror (= fördjupningar i jorden).

En förenklad modell av dessa fåror ges av en trigonometrisk funktion:
$f(x) = A \cdot sin\ (kx) + B$

f är höjden i cm räknat från den platta delen.
x är avståndet i cm längs åkern
och A, k och B är konstanter.

En bonde mäter upp några avstånd som visas i figuren nedan:



Skiss över åkern i genomskärning

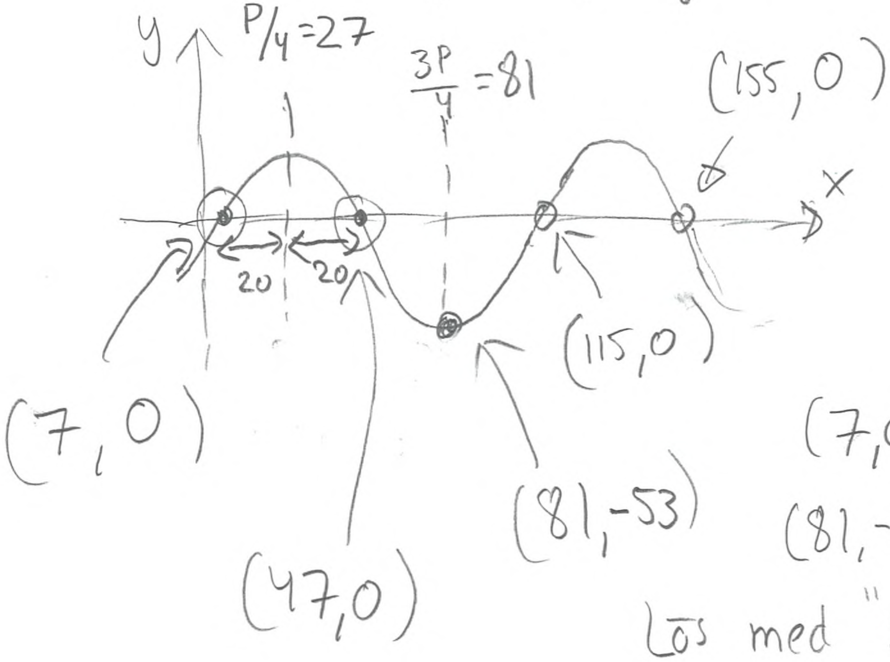
a) Bestäm värdet av konstanten k med hjälp av de uppmätta värdena i figuren. *Svara exakt eller med 3 decimaler!* (0/1/0)

En period = 40+68 = 108 cm ⇒ $K_{rad} = \frac{2\pi}{108} \approx 0,058..$

$K_{grader} = \frac{360}{108} \approx 3,333.$

b) Bestäm värdet av konstanterna A och B *Svara med 3 decimaler!* (0/0/2)

Kan lösas på många sätt, ex regression eller ekvationssystem, men oavsett behövs punkter som ligger på grafen:



"RegressionSinus"

$\Rightarrow \underbrace{-15,037}_{=B} + \overbrace{37,963}^{=A} \cdot \sin\left(\frac{360}{108}x\right)$

eller

ekv. system:

$(7,0) \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{360}{108} \cdot 7\right) + B = 0$

$(81,-53) \Rightarrow A \cdot \sin\left(\frac{360}{108} \cdot 81\right) + B = -53$

Lös med "skärning" ⇒ $A \approx 37,963$
$B \approx -15,037$