FACIT

Några uppgifter om samband mellan förändringshastigheter

1. Radien hos en cirkel växer med den konstanta hastigheten 2 cm/s

Hur snabbt ökar cirkelns area vid den tidpunkt när radien är 40 cm?

Arean hos en cirkel: $A = \pi \cdot r^2$

Derivera: $A' = 2\pi \cdot r \cdot r'$

$r = 40$ cm
$r' = 2$ cm/s $\Rightarrow A' = 2\pi \cdot 40 \cdot 2 = 503$ cm²/s

2. Sidan hos en kvadrat växer med konstant hastighet.

När sidan är 20 cm ökar kvadratens area med 10 cm^2/s

a) Bestäm hastigheten som sidan växer med.

Arean hos en kvadrat: $A = x^2$

Derivera: $A' = 2x \cdot x' \Rightarrow x' = \frac{A'}{2x}$

$x = 20$ cm
$A' = 10$ cm²/s $\Rightarrow x' = \frac{10}{2 \cdot 20} = 0{,}25$ cm/s

b) Om kvadraten från början har sidan 0 cm.
Hur stor är arean efter 10 sekunder?

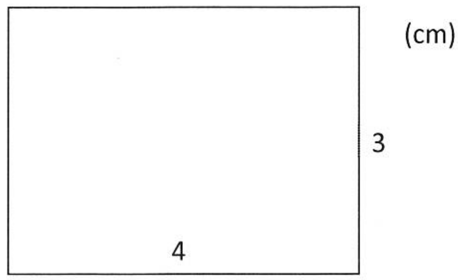
$x' = 0{,}25$ cm/s $\Rightarrow$ Sidan ökar med 0,25 cm/s.

Sidan efter 10 s $= 0{,}25 \cdot 10 = 2{,}5$ cm

Area efter 10 s $= 2{,}5^2 = 6{,}25$ cm²

3. Figuren visar hur en rektangel ser ut vid tiden $t = 0$ s.

Anta att båda rektangelns sidor ökar med den konstanta ökningen 2 cm /s.



a) Hur stor är arean vid $t = 10$ s?

Ökningen på 10 s $= 10 \cdot 2 = 20 \Rightarrow$ Sidorna: 24 och 23

Arean efter 10 s $= 24 \cdot 23 = 552$ cm²

b) Hur *snabbt ändras* arean vid tiden $t = 10$ s?

Arean av en rektangel: $A = b \cdot h = (4+x)(3+x) = 12 + 7x + x^2$

Derivera: $A' = (7 + 2x) \cdot x'$

$x =$ ökningen $= 20$ cm
$x' = 2$ $\Rightarrow A' = (7 + 2 \cdot 20) \cdot 2 = 94$ cm²/s

4. Ett kubiskt format isblock smälter så att sidan krymper med konstant hastighet.

När sidan är $8\ mm$ minskar volymen med $6\ mm^3/s$

a) Bestäm hastigheten som sidan krymper med.

Volymen av en kub: $V = x^3$

Derivera: $V' = 3x^2 \cdot x' \Rightarrow x' = \frac{V'}{3x^2}$

$x = 8\ mm$
$V' = -6\ mm^3/s$ $\Rightarrow x' = \frac{-6}{3 \cdot 8^2} = -0{,}031\ mm/s$

b) Iskubens volym är från början $27\ 000\ mm^3$.
Hur lång tid tar det innan det smält ned helt?

$V = 27000\ mm^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27000} = 30\ mm$

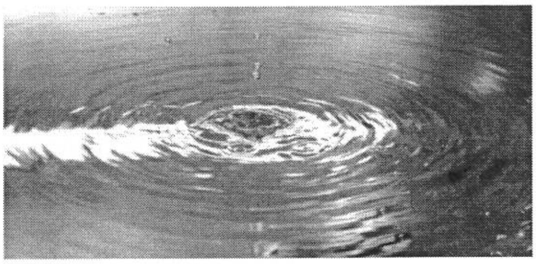
$x' = -0{,}031\ mm/s \Rightarrow$ "Sidan minskar med 0,031 mm/s"

Antal sekunder: $\frac{30}{0{,}031} = 960\ s = 16$ minuter

5. Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften.

Uppgift nr 14 (3253)
0/3

En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten 1,5 m/s.



Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan?

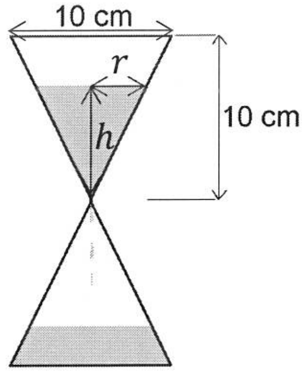
Arean av en cirkel: $A = \pi \cdot r^2$

Derivera: $A' = 2\pi r \cdot r'$

$r' = 1{,}5\ m/s$
$t = 6\ s$ $\Rightarrow r = 1{,}5 \cdot 6 = 9\ m$

$r = 9\ m$
$r' = 1{,}5\ m/s$ $\Rightarrow A' = 2\pi \cdot 9 \cdot 1{,}5 = 84{,}8\ m^2/s$

6. Ett klassiskt timglas kan sägas bestå av två **koner** vända mot varandra med en smal öppning där en vätska sakta rinner ned.



Ett sådant timglas med angivna mått visas i figuren till höger.
Anta att höjdnivån förändras konstant (så att vätskan i det övre timglaset hela tiden har formen av en kon).

En formel för volymen av vätskan i den övre konen kan skrivas som

$V = \frac{2\pi r^3}{3}$

För den övre konen gäller att i det ögonblick när radien hos vätskan är 3 cm minskar volymen med 7,1 cm^3/s

a) Hur länge dröjer det innan timglaset har runnit ut om det från början är helt fullt?

Volymen (given i uppgiften): $V = \frac{2\pi r^3}{3}$

Derivera: $V' = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 \cdot r^2 \cdot r'$

$\Rightarrow r' = \frac{V'}{2\pi r^2}$

$r = 3cm$

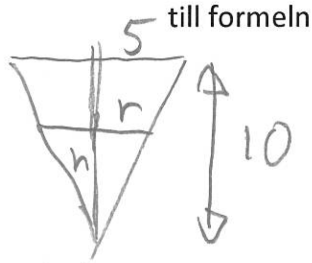
$V' = -7{,}1 \, cm^3/s \Rightarrow r' = \frac{-7{,}1}{2\pi \cdot 3^2} = -0{,}126 \, cm/s$

Radien från början $= 5 cm$

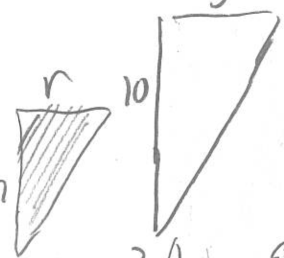
Antal sekunder: $\frac{5}{0{,}126} = 39{,}8 s$

≈ 40 sekunder

b) Visa har man utifrån geometrin hos timglaset kan komma fram till formeln $V = \frac{2\pi r^3}{3}$



Likformighet



$\frac{h}{10} = \frac{r}{5}$

$\Rightarrow h = 2r$

V = Volymen av en kon $= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (h)}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (2r)}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$

VSV

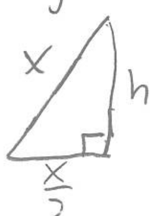
7. Sidan hos en *liksidig* triangel växer med den konstanta hastigheten 3 cm/s

Ta fram en formel som ger hastigheten som **arean** ändras med vid tiden t s

Liksidig triangel:

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

h ges av Pyth. sats



$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$h^2 = \frac{3x^2}{4}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x}{2} = \frac{\sqrt{3} x^2}{4}$

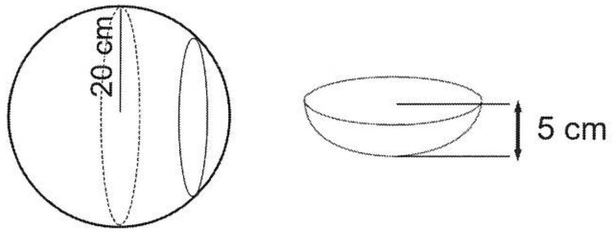
Derivera: $A' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot x \cdot x'$

$x = 3 \cdot t$

$x' = 3$

$\Rightarrow A' = \frac{9\sqrt{3}}{2} t$

8. Nedanstående figur visar en skål formad som ett segment av ett klot med radien 20 cm.



Anta att skålen fylls med vatten så att volymökningen är konstant.
Då vattnets höjd är 2 cm ökar vattenhöjden med 0,1 cm/s.

Zcóla påstår att volymen av vattnet, V, när vattenhöjden är h ges av sambandet

$$V = \pi\left(400h + \frac{(20-h)^3}{3} - \frac{20^3}{3}\right)$$

Hur lång tid tar det att fylla skålen om den från början är tom?

Derivera: $V' = \pi\left(400 + (20-h)^2 \cdot (-1)\right) \cdot h' =$
$= \pi\left(400 - (20-h)^2\right) \cdot h'$

$h' = 0{,}1 cm/s$
$h = 2 cm$

$\Rightarrow V' = \pi\left(400 - (20-2)^2\right) \cdot 0{,}1 = 23{,}9 cm^3/s$

Hela volymen $= V(5) = 1439{,}9 cm^3$

Tiden $= \frac{\text{Volymen}}{V'} = \frac{1439{,}9}{23{,}9} = 60{,}3 s$

9. En vattenballong sätts under en vattenkran med ett konstant vattenflöde.

Anta att vattenballongen hela tiden har formen av ett klot och att en ballong är full när volymen är 4000 cm^3

I det ögonblick när ballongens volym är 65,5 cm^3 ökar radien med 1,1 cm/s

Hur lång tid tar det att fylla en ballong med vattenkranen?

Volymen av ett klot: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Derivera: $V' = \frac{4\pi}{3} \cdot 3 \cdot r^2 \cdot r'$

$V = 65{,}5 cm^3$ $\quad r' = 1{,}1 cm/s$

$\frac{4\pi r^3}{3} = 65{,}5 \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot 65{,}5}{4\pi} = 15{,}6 cm$

$r = \sqrt[3]{15{,}6} \approx 2{,}5$

$\Rightarrow V' = 4\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 1{,}1$
$= 86{,}43 cm^3/s$

Med V' känt kan tiden bestämmas:
$\frac{4000}{86{,}43} = 46{,}3 s$