FACIT

Några blandade problemlösningsuppgifter om derivata

Uppgifterna 1 – 8 är tänkta att lösas utan miniräknare

1. a) Bestäm tangentens ekvation till funktionen $f(x) = \ln(x)$ i den punkt där $x = 1$

Lutningen hos tangentens ges av derivatan: $f'(x) = \frac{1}{x}$

$k = f'(1) = \frac{1}{1}$ $\quad y = \ln 1 = 0$

$y = kx + m \Rightarrow 0 = 1 \cdot 1 + m \Rightarrow$
$m = -1$

$\boxed{y = 1x - 1}$

b) I en annan punkt är tangentens ekvation $y = 0{,}25x + 0{,}386$
Vid vilket x-värde finns denna punkt?

Lutningen = Tangentens k-värde = 0,25

$\frac{1}{x} = 0{,}25 \Rightarrow x = 4$

---

2. Hitta det x-värde som ger största värdet till funktionen $f(x) = x \cdot e^{-0,1x}$.
Svara exakt!

Största värdet ges där $f'(x) = 0$: $f'(x) = 1 \cdot e^{-0,1x} + x(-0{,}1e^{-0,1x})$

$= \left[\begin{matrix}\text{Bryt ut} \\ e^{-0,1x}\end{matrix}\right] = e^{-0,1x}(1 - 0{,}1x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-0,1x}(\underbrace{1 - 0{,}1x}) = 0$

$1 - 0{,}1x = 0 \Rightarrow x = 10$

3. Visa att det för funktionen $f(x) = \sin(ax) - \cos(x)$ gäller att tangenten i den punkt där $x = 0$ har ekvationen $y = ax - 1$.

Tangentens lutning = $f'(0)$

$x = 0$

$y = f(0) = \sin(0) - \cos(0) = -1$

$f'(x) = a\cos(ax) + \sin(x)$

$f'(0) = a\cos(0) + \sin(0)$

$k = f'(0) = a \cdot 1 + 0 = a$

$(0, -1)$
$k = a$ $\Rightarrow$ $k \cdot x + m = y$
$a \cdot 0 + m = -1$

$\Rightarrow y = kx + m =$
$= a \cdot x - 1$ VSV

4. Bestäm $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ då $f(x) = x - ln(1 + 2x)$ om x anges i radianer

Alla gränsvärden av typen $h \to 0$ kan tolkas som derivatavärden:

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+2x} \cdot 2$

$= 1 - \frac{2}{1+2x}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ = "Derivatan då $x = 0$" $= f'(0) =$

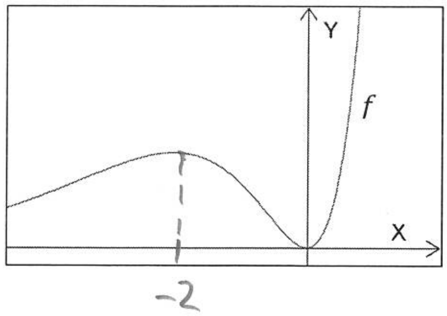
"x-värdet"

$1 - \frac{2}{1} = \boxed{-1}$

5. Grafen till funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x$ visas till höger.

Funktionen har ett lokalt maximum.

Bestäm koordinaterna för detta maximum.
Svara exakt!



$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(2x + x^2) = 0$

$2x + x^2 = 0$

$x = 0 \quad x = -2$

y-värdet ges av

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2}$

$= 4e^{-2}$

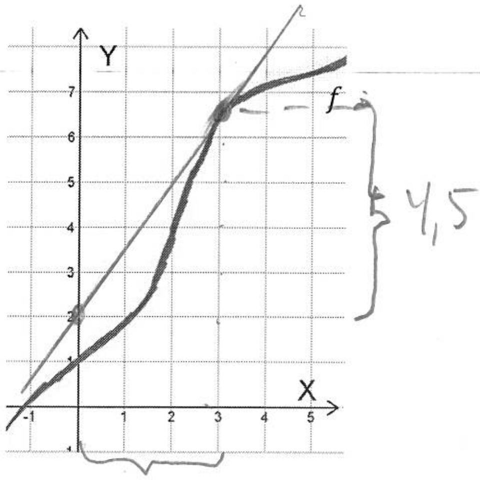
Maxpunktens koord: $(-2, \; 4e^{-2})$

6. Till höger visas grafen till funktionen $y = f(x)$

Funktionen $y = f(x)$ har en tangent med tangeringspunkt (3; 6,5) som skär y-axeln vid $y = 2$

En annan funktion, g, är definerad som
$g(x) = (f(x))^2$

Bestäm värdet av $g'(3)$



$g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$ (kedjeregeln)

$g'(3) = 2 \cdot f(3) \cdot f'(3) = \begin{bmatrix} f(3) = 6{,}5 & 3 \\ f'(3) = 1{,}5 & \leftarrow \text{Tangentens lutning} \end{bmatrix}$

$= 2 \cdot 6{,}5 \cdot 1{,}5 = 19{,}5$

7. a) Visa att det för funktionen $f(x) = x^3 + bx$ inte kan finnas några maxpunkter om $x > 0$ oavsett värde på b

För maxpunkter gäller att $f'' < 0$

$f'(x) = 3x^2 + b$ Om $x > 0$ blir $f''(x) > 0$

$f''(x) = 6x$ Alltså kan inga maxpunkter finnas då $x > 0$

b) Visa att det för funktionen $f(x) = x^3 + bx$ kommer finnas **en minpunkt** om $x > 0$ om $b < 0$

Enl. a)-uppg. gäller att $f''(x) > 0$ om $x > 0$

Om $f'(x) = 0$ motsvarar det alltså en minpunkt.

$f'(x) = 3x^2 + b$ Om $f'(x) = 0$ måste ekvationen

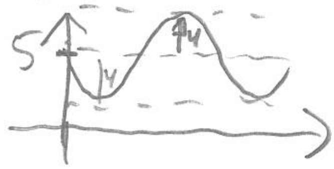
$3x^2 + b = 0$ gå att lösa: $x = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ Om $b > 0$ blir lösningen komplex.

8. Funktionen f har derivatan $f'(x) = 5x + 12cos\left(\frac{x}{3}\right)$

a) Sten Koll påstår att funktionen f måste sakna maximipunkt.
Undersök om Sten har rätt.

Sakna max. punkt $\Rightarrow$ $f'' > 0$ för alla x

$f''(x) = 5 - 12\sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 5 - 4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$



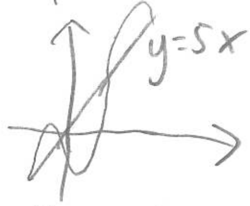
Denna är alltid positiv

$\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ Inga maxpunkter.

b) Den kloke Derivia påstår att funktionen dock har en minpunkt
Visa att Derivia har rätt.

Om det finns ngn punkt där $f'(x) = 0$ är den en minpunkt (enl. att $f''(x) > 0$ för alla x enl. a)-uppg.)

$f'(x) = 5x + 12\cos\left(\frac{x}{3}\right)$



Grafen kommer vara tvungen att passera x-axeln pga 5x-termen $\Rightarrow f'(x) = 0$ för ngt x VSV.

Uppgifterna 9 – 11 är tänkta att lösas med miniräknare

9. a) Bestäm tangentens ekvation till funktionen $e^{-x} + \sin(\ln(x))$
i den punkt där $x = 1{,}2$.
Svara med 3 decimaler!

(x radianer)

Rita ut funktionen och välj $\boxed{\text{DRAW}}$ - $\boxed{\text{5 Tangent}}$

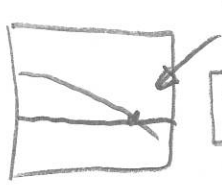
$Y = 0{,}518327\ldots X + (-0{,}13948\ldots) \approx$

$\boxed{y = 0{,}518x - 0{,}139}$

b) Det finns en punkt i intervallet $10 < x < 15$ där y-värdet är 0,5.
Bestäm derivatans värde i denna punkt.
Svara med 3 decimaler!

Rita funk. i intervallet

Rita in linjen $Y = 0{,}5$

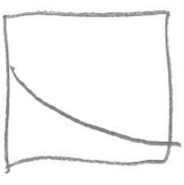


Intersection: $x = 13{,}708$

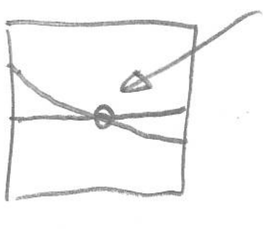
$\boxed{\text{2nd}} + \boxed{6\ \frac{dy}{dx}}$ ger $-0{,}0631$

c) Det finns en punkt i intervallet $1 < x < 5$ där **derivatan** har värdet 0,2.
Bestäm x-värdet i denna punkt.
Svara med 3 decimaler!

Rita ut Nderiv i intervallet



Rita in linjen $Y = 0{,}2$

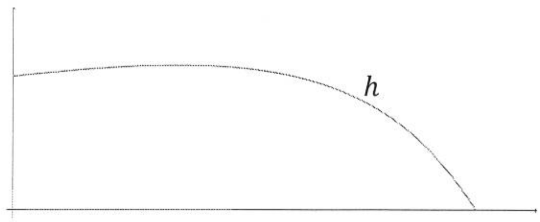


Intersection: $x = 2{,}254$

10. Figuren visar en förenklad bild av en klippa vid havet där höjden över vattnet, h meter, beskrivs av

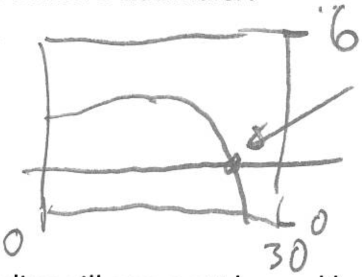
$$h(x) = 4 + 0{,}1x - \frac{e^{0{,}2x}}{0{,}2x+6}$$

där x anger antalet meter i horisontell riktning.



a) Hur stor är lutningen i den punkt där höjden är 1,5 meter?
Svara med 3 decimaler!

Rita funk. och linjen $y = 1{,}5$

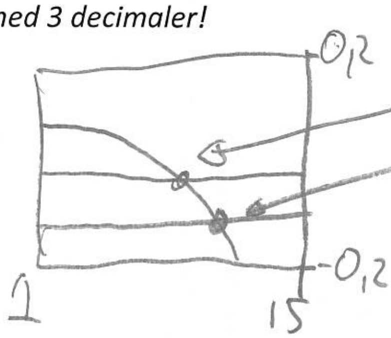


Intersection: $x = 18{,}7702...$

dy/dx där ger $\boxed{-0{,}686}$

b) Karolina vill prova att bygga klosstorn vid två ställen och jämföra hur höga de blir innan de välter.
Den punkt där lutningen är noll, och den punkt den där lutningen är $-0{,}1$
Var ligger dessa punkter?
Svara med 3 decimaler!

Rita in Nderiv och linjerna $y = 0$ och $y = -0{,}1$



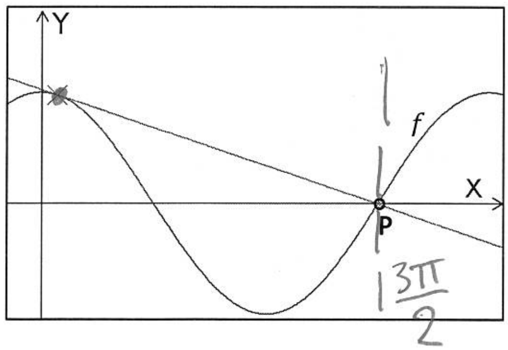
Intersection: $x \approx 7{,}302$

Intersection: $x \approx 11{,}191$

Punkterna ligger 7,302 m och 11,191 m in på klippan.

11. Figuren till höger visar grafen till kurvan $f(x) = 2\cos(x)$, där x anges i radianer, samt den tangent till f som går igenom punkten **P**, där punkten **P** är skärningspunkten mellan f och x-axeln.

Bestäm tangentens ekvation.
Svara med 3 decimaler!



Tangeringspunkten har koord: $(a, f(a)) = (a, 2\cos(a))$

Linjens lutning ges av $k = f'(a) = -2\sin(a)$

Linjens lutning kan också uttryckas $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ där

$\Delta y = -2\cos a$ och $\Delta x = \frac{3\pi}{2} - a$. Detta ger ekv:

"k=k" $-2\sin(a) = \frac{-2\cos(a)}{\frac{3\pi}{2} - a}$. Miniräknarlösning ger a till: $a \approx 0{,}21897...$

DRAW + $\boxed{\text{5 Tangent}}$ ger $\boxed{y = -0{,}434x + 2{,}047}$